内容简介

本书是工科数学的内容、方法与技巧丛书之一，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等，按章节对各个问题的内容、方法与技巧进行了归纳提高、释疑解难、分析演绎，利用大量的例题，对问题分析、数据计算作了充分的介绍和必要的比较，以帮助读者理解概念，掌握方法，熟悉技巧.

本书是大学生学习复变函数的优秀辅导书，希望它能成为读者的良师益友.

前 言

复变函数是高等学校的一门重要的数学基础课，也是自然科学与工程技术中常用的数学工具.它是微分方程、奇异积分方程、计算数学和概率论等数学分支的主要解析方法，又是空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科的重要的几何定性研究方法.因此，学好复变函数课程对于在校大学生和科学技术工作者是十分重要的.本书就是为了帮助广大读者学好复变函数而编写的.

复变函数的许多基本概念，如函数、极限、连续、导数和积分在形式上与微积分几乎相同，但复变函数却有本质上的深化，尤其是在方法和技巧上，更有着显著的不同.读者在学习中要特别注意它们之间的联系、发展和变化，理解概念、掌握方法、熟悉技巧.

本书按照《复变函数课程教学大纲》要求编写，在概念与例题选编上都略有提高.为了使读者学习和使用起来更加方便，采用了以章节为序的编写方式.每节分三个部分：主要内容部分对概念和方法进行了归纳和凝练，强调了读者应该注意的问题；疑难解析部分针对读者在理解概念和掌握方法中可能出现的问题进行了解剖分析、比较论证，尽可能使读者消除疑惑、解决困难；方法、技巧与典型例题分析部分利用了大量的例题，对分析问题、研究问题、计算数据、求取结果的方法作了大量的介绍和必要的比较，给读者掌握方法、熟悉技巧创造了很好的条件.缺憾的是，限于篇幅的原因，许多可以一题多解的问题我们只能列出一二种方法.希望读者在学习本书之后，作为练习，自己来补足这一点.编者相信本书能给读者以帮助和启发，使读者有较大的受益.

本书是工科数学的内容、方法与技巧丛书之一，欢迎读者选用本套丛书. 本书在编写和出版中得到华中科技大学出版社编辑和领导的热心支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，错漏之处在所难免，热忱欢迎读者批评指正.

孙清华　孙昊

2003 年 5 月

目　录

第一章　复数与复变函数

本章主要讨论复数的概念、性质及运算，并引入平面点集、复变函数及其极限与连续性的概念，为以后各章的学习奠定基础.

第一节　复数的概念与几何表示

主要内容

一、复数的概念

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x, y 为任意实数，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 称为虚单位. 又记 $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$，分别称为 z 的实部与虚部.

二、复数的各种表示法

1. 复数的复平面表示

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与坐标平面上的点 (x, y) 构成一一对应的关系，如图 1.1 所示. 用点 (x, y) 表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的方法，称为复数的复平面表示法. 此时，直角坐标平面称为复平面或 z 平面，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，点 $z(x, y)$ 即复数 z.

2. 复数的向量表示

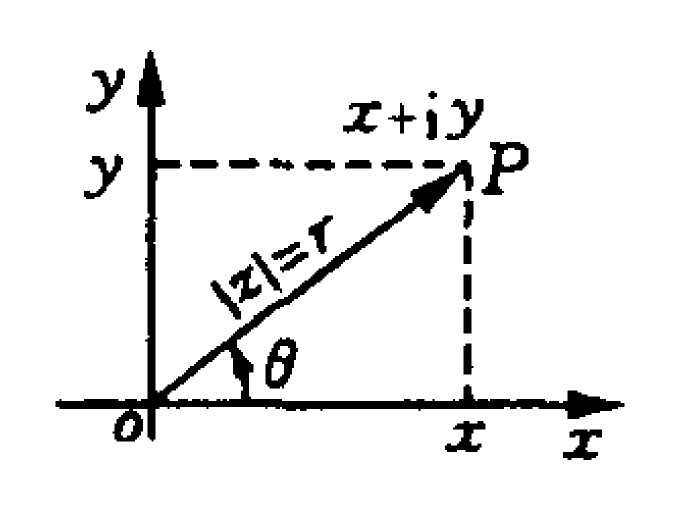


图 1.1

在复平面上，复数 z 又与从原点指向点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的向量构成一一对应，所以复数 z 可以用向量 $\overrightarrow{oP}$ 表示. 向量的长度称为 z 的模；当 $z \neq 0$ 时，以 x 轴正向为始边，以 $\overrightarrow{oP}$ 为终边的角

(弧度)称为 z 的辐角. 分别记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mathrm{Arg}z = \theta \left(\tan(\mathrm{Arg}z) = \frac{y}{x} \right).$$

辐角有无穷多个,其中满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$. $\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi$,$\theta_1$ 为任一辐角. $z = 0$ 时,辐角任取.

3. 复数的极坐标表示

利用直角坐标(x,y)与极坐标(r,θ)之间的关系,将复数 z 表示为三角函数表示式:

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \dfrac{y}{x}$.

4. 复数的指数表示式

应用欧拉公式,将复数 z 表示为 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

复数在不同的运算中可选择不同的表示式进行运算.

三、复数的运算

1. 相等. 两个复数 z_1 和 z_2,当且仅当实部与虚部分别相等时才相等.

2. 对于两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,有

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \\ z = z_1 - z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2), \\ z = z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 + x_1y_2), \end{aligned}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

z 分别称为 z_1 和 z_2 的和、差、积、商. 在商中,$z_2 \neq 0$.

3. 实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数,它有如下运算性质:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ \bar{\bar{z}} = z;$$

$$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2;$$

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z),\ z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z).$$

4. 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

则
$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则 $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$.

5. 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2 - \theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_2 - \theta_2)] = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)}.$$

若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

这里 $k = 0, 1, \cdots, n-1$. w 的 n 个值恰为以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周的内接正 n 边形的顶点. 当 $k = 0$ 时，w_0 称为主值.

疑 难 解 析

1. 复数为什么不能比较大小？

答 实数能比较大小，是因为实数是有序的；而复数是无序的，所以不能比较大小.

因为复数是实数的推广，则若复数有大小，其大小关系应与实数中大小关系保持一致. 不妨取复数 0 和 i 加以讨论：

因为 $\mathrm{i} \neq 0$，设 $\mathrm{i} > 0$，则 $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > \mathrm{i} \cdot 0 = 0$，得 $-1 > 0$，显然不成立；设 $\mathrm{i} < 0$，则 $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > \mathrm{i} \cdot 0 = 0$(不等式两边同乘以小于零的数，

不等号反向)，也有 $-1>0$，所以，i 与 0 无法比较大小. 从而知，两个复数是不能比较大小的.

然而，复数的模、实部和虚部都是实数，辐角也是实数，是有序的. 因此，可以比较两个复数的模、实部、虚部和辐角的大小. 在这个意义上，也称复数是部分有序的.

2. 怎样确定辐角的主值 arg$z$?

答　因为复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$. 而 $-\pi<\arg z=\theta_0\leqslant\pi$. 所以，$\theta_0$(见图 1.2) 按下列关系式来确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第一象限},\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\text{ 在第二象限},\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & z\text{ 在第三象限},\\ \arctan\dfrac{y}{x}+2\pi, & z\text{ 在第四象限}.\end{cases}$$

除 0 以外的复数都有确定的辐角. 0 的辐角可以是任意的.

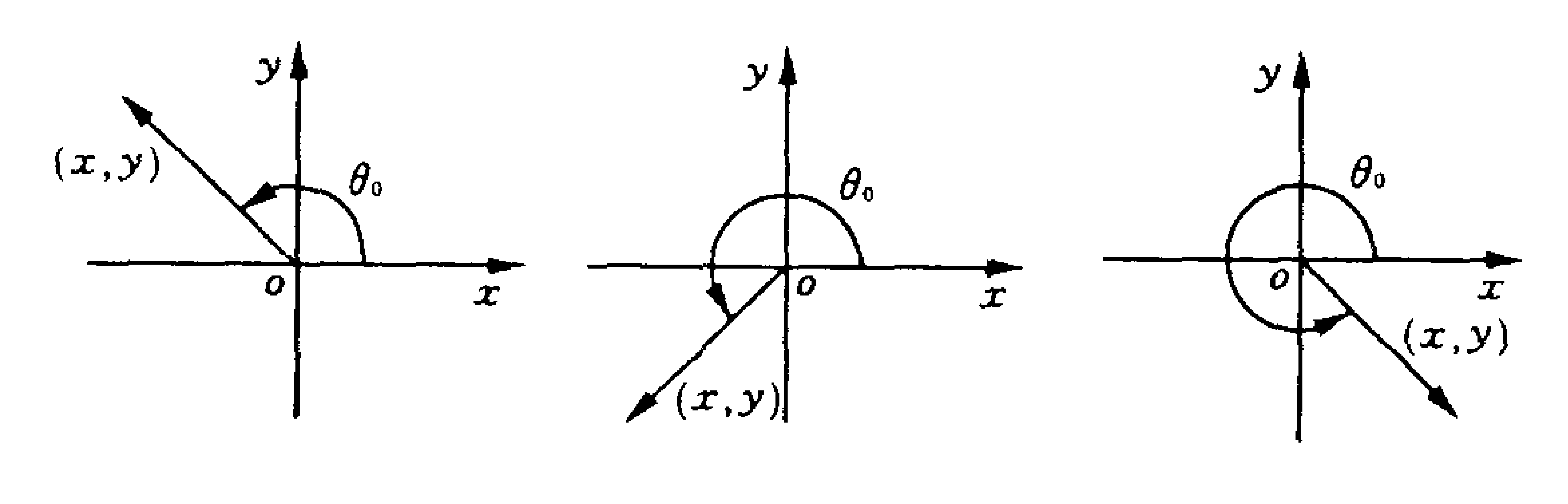


图 1.2

3. 复数可以用向量表示，是否就此可以认为复数的运算与向量的运算相同?

答　不能. 复数的运算与向量的运算有相同之处也有不同之处.

如复数运算与向量运算有相同的加法运算和数乘运算，但向

量运算有数量积、向量积和混合积，复数则没有；复数运算有乘、除、乘幂和方根，向量也没有. 复数相乘的几何意义是将复数 z_1 放大 $|z_2|$ 倍，再将其辐角按逆时针方向旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$，即先作一个相似变换，再作一个旋转变换，而向量的数量积与向量积都不是这样的.

4. 怎样理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式？

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2,\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

答 由于上述两个公式两边的辐角都有无穷多个值，因此等式的意义是：任意给定一个等式右边两个多值函数一对可能取的值，右边多值函数也必有一个值使这个等式成立. 反之也是这样.

也就是说，等式的值是在全体意义上的相等，而不是某一组值的相等. 例如，若 θ_1 和 θ_2 为 $\mathrm{Arg}z_1$ 和 $\mathrm{Arg}z_2$ 的任一对选定值，则 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 中一定有一个 θ 存在，使 $\cos\theta = \cos(\theta_1 + \theta_2)$，$\sin\theta = \sin(\theta_1 + \theta_2)$. θ 不一定就是 $\theta_1 + \theta_2$，而可以是使 $\theta + 2k\pi = \theta_1 + \theta_2$ 中的一个. 反之也是这样.

5. 复数所具有的运算性质是否使复数集合成为复数域？

答 是. 复数的运算具有以下规律：

(1) 若 z_1, z_2 是复数，则 $z_1 + z_2$ 也是复数.

(2) 满足对加法的结合律与交换律，即对于复数 z_1, z_2, z_3，有

$z_1 + (z_1 + z_2) = (z_1 + z_2) + z_3,\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$

(3) 关于加法存在零元素，对于任意复数 z，有

$$0 + z = z + 0 = z.$$

(4) 关于加法存在逆元素. 对于任意复数 z，存在复数 $-z$，使

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

(5) 若 z_1, z_2 是复数，则 z_1z_2 也是复数.

(6) 满足对乘法的结合律与交换律，即对于复数 z_1, z_2, z_3，有

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,\ z_1z_2 = z_2z_1.$$

(7) 关于乘法存在单位元素 1，对于任意复数 z，有

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

(8) 关于乘法存在逆元素. 对于任意复数 $z = 0$,存在复数 $\frac{1}{z}$,使

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1.$$

(9) 满足对加法与乘法的分配律,即对于任意复数 z_1, z_2 和 z_3,有

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

所以,全体复数构成一个复数域.

方法、技巧与典型例题分析

首先,作为基本概念,要熟悉复数的各种表示形式及相互转换,特别是辐角主值的确定. 其次,复数运算必须遵循复数的运算规律,注意复数运算与实数运算的不同点.

一、复数的概念

例 1 求下列复数的模与辐角:

(1) $\sqrt{3} + \mathrm{i}$; (2) $\frac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$;

(3) $\frac{(3 + 4\mathrm{i})(2 - 5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$; (4) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n$;

(5) $\mathrm{i}^8 - 4\mathrm{i}^{21} + \mathrm{i}$; (6) $\frac{(3 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(3 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}$.

解 (1) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$,

$$\arg z = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

(2) $\frac{1}{3 + 2\mathrm{i}} = \frac{3 - 2\mathrm{i}}{(3 - 2\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})} = \frac{3}{13} + \left(\frac{-2}{13}\right)\mathrm{i}$,

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{-2}{13}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

$$\arg z = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right).$$

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i} = -\left(-2+\dfrac{3}{2}i\right)(2-5i) = -\dfrac{7}{2} - 13i,$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + (-13)^2} = 5\frac{\sqrt{29}}{2},$$

$$\arg z = \arctan\left(\frac{26}{7}\right) - \pi.$$

(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n = (e^{i\pi/3})^n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right),$

$|z| = 1$, $\arg z = \dfrac{n\pi}{3} + 2k\pi$ ($-\pi < \dfrac{n\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \pi$ 的 k).

(5) $i^8 - 4i^{21} + i = (-1)^4 - 4i + i = 1 - 3i,$

$|z| = \sqrt{1+(-3)^2} = \sqrt{10}$, $\arg z = -\arctan 3$.

(6) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)} = \dfrac{7-i}{7+i} = \dfrac{48}{50} - \dfrac{14}{50}i,$

$|z| = \sqrt{\left(\dfrac{48}{50}\right)^2 + \left(\dfrac{-14}{50}\right)^2} = 1$, $\arg z = -\arctan\left(\dfrac{7}{24}\right)$.

$|z|$ 还可由以下方法求得：

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)} \cdot \frac{(3-i)(2+i)}{(3+i)(2-i)} = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

$|z| = \left|\dfrac{3+i}{3-i}\right|\left|\dfrac{2-i}{2+i}\right| = 1 \cdot 1 = 1$ (共轭复数的模相等).

例 2 求满足下列条件的复数 z：

(1) $z + |z| = 2 + i$；　　(2) $z = 3 + ai$, 且 $|z-2| < 2$；

(3) $(1+2i)\bar{z} = 4 + 3i$；

(4) $1 \leqslant z + \dfrac{10}{z} \leqslant 6$ 为实数, x, y 为整数.

解 (1) 设 $z = x + iy$, 则 $x + iy + \sqrt{x^2+y^2} = 2 + i$.

由 $x+\sqrt{x^2+y^2}=2, y=1$，得 $x=\dfrac{3}{4}$，故 $z=\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$.

(2) 因为 $|z-2|=|3+a\mathrm{i}-2|=\sqrt{1+a^2}<2$，所以，$a$ 的值可取 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 间任一实数，z 有无穷多个.

(3) 因为 $\bar{z}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，所以 $z=2+\mathrm{i}$.

(4) 设 $z=x+\mathrm{i}y$ ($x, y\in\mathbf{R}$，且 x, y 不同时为零)，则

$$z+\frac{10}{z}=x+\mathrm{i}y+\frac{10}{x+\mathrm{i}y}=\left(x+\frac{10x}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}\left(y-\frac{10y}{x^2+y^2}\right).$$

由条件知 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$.

当 $y=0$ 时，满足 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=x+\dfrac{10}{x}\leqslant 6$ 的 x 不存在.

当 $x^2+y^2=10$ 时，由 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=2x\leqslant 6$ 知，$\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3$，故 x 可取 1，2，3，y 可取 ± 3，± 1. 于是，满足条件的复数为

$$1+3\mathrm{i},\ 1-3\mathrm{i},\ 3+\mathrm{i},\ 3-\mathrm{i}.$$

例 3 化简 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}}$，$|x|\geqslant 1$.

解 设原式 $=u+\mathrm{i}v$，则 $1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}=u^2-v^2+2\mathrm{i}uv$，由

$$u^2+v^2=1,\ 2uv=2x\sqrt{x^2-1},$$

解得 $u=\pm x, v=\pm\sqrt{x^2-1}$，所以

$$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}}=\pm(x+\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}).$$

例 4 当 x, y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立？

解 由等式可得 $x+1+\mathrm{i}(y-3)=2+8\mathrm{i}$，所以

$$\begin{cases}x+1=2,\\ y-3=8,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=11.\end{cases}$$

例 5 求下列复数的三角表示式与指数表示式：

(1) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(2) $1+\mathrm{i}\tan\theta\quad(\pi<\theta<2\pi)$；

(3) $-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；　　(4) $\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$；

(5) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

解 (1) 因为 $|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2,\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

(2) 因为 $|1+\mathrm{i}\tan\theta|=\sqrt{1+\tan^2\theta}=-\sec\theta,\arg z=\dfrac{3}{2}\pi-\theta$，所以，当 $\pi<\theta<2\pi$ 时，有

$$\begin{aligned}1+\mathrm{i}\tan\theta&=-\frac{1}{\sin\theta}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right]\\&=-\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}.\end{aligned}$$

(3) 因为 $|-\sqrt{12}-2\mathrm{i}|=\sqrt{12+4}=4,\arg z=-\dfrac{5}{6}\pi$，所以

$$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}.$$

(4) 先将分子、分母分别用指数式表出，则

$$\begin{aligned}\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}&=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi})^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi})^3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}\\&=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi.\end{aligned}$$

(5) 因为 $|1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi|=\sqrt{2(1-\cos\varphi)}=2\sin\dfrac{\varphi}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\arg(1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)&=\arctan\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\\&=\arctan\left(1+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

故 $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\right]$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

也可以这样得出结果：

$$\begin{aligned}1-\cos\varphi+i\sin\varphi &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}+i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right]\\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

例 6 将复数 $1+i$ 所对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{2}{3}\pi$，求此向量所对应的复数 z.

解 因为只进行了旋转变换而模不变，相当于对 $1+i$ 乘以 $e^{-i2\pi/3}$，所以

$$\begin{aligned}z &= (1+i)e^{-i2\pi/3} = (1+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= (1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

例 7 设 $\arg(z+2)=\frac{\pi}{3}$，$\arg(z-2)=\frac{5}{6}\pi$，求 z.

解 设 $z+2=r_1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}r_1+\frac{\sqrt{3}}{2}ir_1$，

$$z-2=r_2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+\frac{1}{2}ir_2,$$

则 $z=\left(\frac{1}{2}r_1-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}ir_1=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2\right)+\frac{1}{2}ir_2.$

比较实部与虚部，得

$$\frac{1}{2}r_1-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}r_1=\frac{1}{2}r_2,$$

解得 $r_1=2$. 于是

$$z=(1-2)+\sqrt{3}i=-1+\sqrt{3}i.$$

二、复数的代数运算

复数的代数运算包括和、差、积、商，还包括乘幂和方根. 为了使运算更加简捷和准确，应该选择合适的表示式来表示复数. 有时还可以由几何意义来讨论复数的代数运算.

例 8 将复数 z 乘以 i 或 $-$i，z 的模与辐角会有什么变化？

解 因为 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$，$-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$，所以

$$z\cdot\mathrm{i}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)},$$

即，此时 z 的模不变，辐角增加 $\pi/2$.

$$z\cdot(-\mathrm{i})=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi/2)},$$

即，此时 z 的模不变，辐角减少 $\pi/2$.

例 9 设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，求 z_1z_2.

解 直接计算

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\sqrt{3}+\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i}-1\\&=(\sqrt{3}-1)+\mathrm{i}(1+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

化为指数式，$z_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$，所以

$$z_1z_2=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/12}.$$

显然，指数式运算更简单.

例 10 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$.

解法 1

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}\\&=\left[\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}\right]^{10}\\&=\left(\frac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\right)^{10}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{10}\\&=\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3\right]^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\left(\frac{8}{8}\right)^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

解法 2 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$,

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3},$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}}\right)^{10}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})^{10}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}20\pi/3}$$

$$=\cos\frac{20}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{20}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 11 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$,所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/4},\ k=0,1,2,3.$$

其四个根为 $$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right),$$

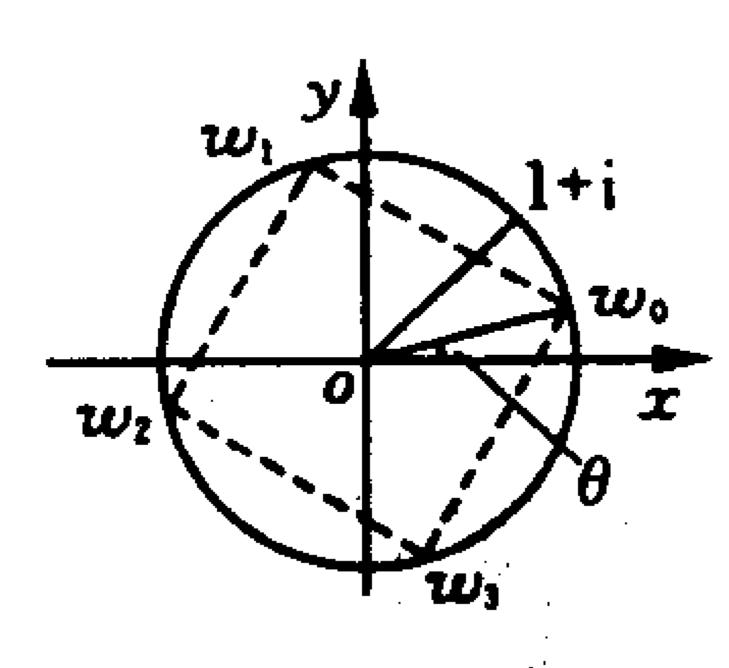


图 1.3

这四个根是以原点为中心、半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆内接正四边形的四个顶点(见图 1.3),w_0 的辐角 $\theta=\pi/16$.

例 12 求方程 $z^3+z^2+z+1=0$ 的根,并将 z^3+z^2+z+1 分解因式.

解 因为 $(z-1)(z^3+z^2+z+1)=z^4-1$,而 $z-1=0$ 的根为 $z_0=1$,则 $z^4-1=0$ 的其余三个根即为所求.

由 $z^4-1=0$，得 $z=\sqrt[4]{1}$. 因为 $1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$，所以，$z^4-1=0$ 的四个根(见图 1.4) 为

$$z_0=\cos\frac{0}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{0}{4}=1,$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i},$$

$$z_2=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1,$$

$$z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i},$$

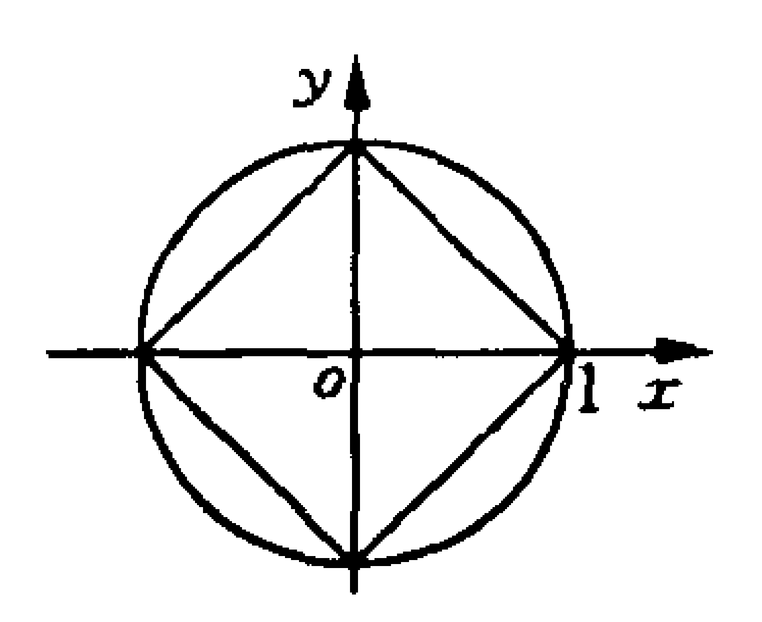


图 1.4

于是，知 $z^3+z^2+z+1=0$ 的根为 i，-1，$-\mathrm{i}$. 且

$$z^3+z^2+z+1=(z-\mathrm{i})(z+1)(z+\mathrm{i}).$$

例 13 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.

解 因为 $z=1$ 不是方程的根，将上式变形，即

$$w^5=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\pi},$$

则由复式的方根知，$w^5=1$ 的根为

$$1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/5},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi/5}.$$

设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$\alpha=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$，由 $w=\frac{1+z}{1-z}$，得

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha-1+\mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\alpha+1+\mathrm{i}\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

所以，方程的根为 $z=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}$，其中 $\alpha=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$.

例 14 已知 $z^3=8$，求 z^3+z^2+2z+2 的值.

解 因为 $z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)=0$，所以 $z=2$ 或 $z^2+2z+4=0$，于是

$$z^3+z^2+2z+2=8+(z^2+2z+4)-2=8-2=6.$$

例 15 解方程 $z^2-4iz-(4-9i)=0$.

解 原方程 $=z^2-4iz+(2i)^2+9i=0$,得

$$(z-2i)^2=-9i\Longrightarrow z=2i+\sqrt{-9i}.$$

因为,由棣美弗公式

$$\sqrt{-9i}=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right]$$

$$=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

故 $$z=2i+\sqrt{-9i}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\left(2\mp\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

例 16 解方程 $\bar{z}=z^{n-1}$ (n 为自然数).

解 若 $n=1$,则 $\bar{z}=1$,得 $z=1$.

若 $n=2$,则 $\bar{z}=z$,z 为全体实数.

若 $n\geqslant 3$,则 $|\bar{z}|=|z^{n-1}|$ 或 $|z|=|z|^{n-1}$,得

$$|z|=0 \text{ 或 } |z|=1.$$

由 $|z|=0$,得 $z=0$.

由 $|z|=1$,知 $z\bar{z}=z^n$,即 $z^n=1$. 于是 $z=\sqrt[n]{1}=e^{i2k\pi/n}$ ($k=0,1,\cdots,n-1$). 当 $k=0$ 时,$z=1$.

例 17 解方程组$\begin{cases}z_1+2z_2=1+i,\\3z_1+iz_2=2-3i.\end{cases}$

解 将第一式乘以 3 再减去第二式,得

$$(6-i)z_2=1+6i\Longrightarrow z_2=\frac{1+6i}{6-i}=i.$$

代回第二式,得 $z_1=1-i$.

三、复数的等式与不等式的证明

证明关于复数的等式与不等式,是复数概念的一个难点,读者要善于借助 z 的不同表示式、z 与 $\frac{1}{z}$ 的关系、$\bar{z}$ 的性质,以及一些实数中的不等式和图形的几何性质来证明.

例 18 若 $|z|=1$,证明:对任何复数 a 和 b,有

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1.$$

证 利用 $|z|=1$，则 $z=\dfrac{1}{\bar{z}}$，于是

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\bar{z}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|\cdot\frac{1}{|z|}=1.$$

例 19 设 $z+z^{-1}=2\cos\theta$ ($z\neq0$，θ 是 z 的辐角)，证明：

$$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta\quad(z\neq0).$$

证 由题设条件，考虑用复数的指数形式或三角形式，又由求证的等式考虑使用棣美弗公式. 所以，设

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则 $$z^{-1}+z=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

比较 $z^{-1}+z=2\cos\theta$，得方程组

$$\begin{cases}r+\dfrac{1}{r}=2,\\ r-\dfrac{1}{r}=0,\end{cases}\Rightarrow r=1\Rightarrow z=\cos\theta+i\sin\theta.$$

由棣美弗公式，得

$$z^n+z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}$$

$$=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta.$$

例 20 证明：

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,\ \sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

证 利用棣美弗公式来证. 由

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

和 $$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+i3\cos^2\theta\sin\theta+i^23\sin^2\theta\cos\theta+i^3\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

知 $\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$，$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

例 21　设$\frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}=a+\mathrm{i}b$，其中 a,b,x,y 均为实数. 证明：

$$a^2+b^2=1.$$

证　先求出 a,b 的 x,y 的表达式. 因为

$$\frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}=\frac{(x+\mathrm{i}y)^2}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}=\frac{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy}{x^2+y^2}=a+\mathrm{i}b.$$

比较系数，得

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=a,\ \frac{2xy}{x^2+y^2}=b.$$

于是　$$a^2+b^2=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2$$

$$=\frac{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1.$$

例 22　设 $z=x+\mathrm{i}y$，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

证　不等式左边等价于

$$\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2\leqslant|z|^2=x^2+y^2,$$

即 $x^2+y^2+2|x||y|\leqslant2(x^2+y^2)\Longrightarrow(|x|-|y|)^2\geqslant0$，
所以，左边不等式成立.

不等式右边等价于

$$|z|^2=x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2=x^2+2|x||y|+y^2,$$

即 $2|x||y|>0$，所以，右边不等式成立. 故原不等式成立.

例 23　设 $|z_0|<1$，证明：若 $|z|<1$，则 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|<1$.

证　若 $|z|<1$，则 $|z|^2(1-|z_0|^2)<1-|z_0|^2$，故

$$|z|^2+|z_0|^2<1+|z|^2|z_0|^2.$$

又　$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)\ \text{(见例 26)}$$

$$<1+|z|^2|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)=|1-z\bar{z}_0|^2.$$

所以
$$\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|^2<1.$$

由模的非负性，得 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|<1.$

例 24 设 w 是 1 的 n 次根，且 $w\neq 1$，证明：w 满足方程
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0.$$

证 因 $w^n=1$，即 $w^n-1=0$，故
$$(w-1)(1+w+w^2+\cdots+w^{n-1})=0,$$
由 $w\neq 1$，故 $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$，即
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0.$$

例 25 设 z_1 和 z_2 为任意复数，a_1,a_2 为实数，且 $a_1^2+a_2^2\neq 0$，证明：
$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2|\leqslant 2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}$$
$$\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

证 引入辅助角 θ，令 $\tan\theta=\dfrac{a_1}{a_2}$. 于是
$$\begin{aligned}2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}&=2|z_1\sin\theta+z_2\cos\theta|^2\\&=2[|z_1|^2\sin^2\theta+|z_2|^2\cos^2\theta+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\sin\theta\cos\theta]\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+(|z_1|^2-|z_2|^2)\cos2\theta\\&\quad+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\sin2\theta\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+A\cos2\theta+B\sin2\theta.\end{aligned}$$
因为 $A=|z_1|^2-|z_2|^2, B=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ 均为实数，有
$$|A\cos2\theta+B\sin2\theta|\leqslant\sqrt{A^2+B^2},$$
又
$$\begin{aligned}\sqrt{A^2+B^2}&=\{|z_1|^4+|z_2|^4-2|z_1^2z_2^2|+4[\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]^2\}^{1/2}\\&=[|z_1|^4+|z_2|^4+2\mathrm{Re}(z_1^2\bar{z}_2^2)]^{1/2}\\&=[|z_1^2+z_2^2|^2]^{1/2}=|z_1^2+z_2^2|,\end{aligned}$$
于是，得

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2}$$
$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|.$$

例 26 利用棣美弗公式，证明拉格朗日的两个三角等式

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \sin\frac{n+1}{2}\theta \cdot \cos\frac{n\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \sin\frac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\frac{n\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2} \quad (\sin\frac{\theta}{2} \neq 0).$$

证 设 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，则 $z^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \sum_{k=0}^{n}z^k. \qquad ①$$

又 $$\sum_{k=0}^{n}z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$
$$= \frac{(1-z^{n+1})(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}$$
$$= \frac{1-z^{n+1}-\bar{z}+z^n}{2-(z+\bar{z})} \quad (z\bar{z}=1),$$

故 $$\sum_{k=0}^{n}z^k = \frac{1}{2 \cdot 2\cos\theta}[1-\cos(n+1)\theta - \cos\theta + \cos n\theta]$$
$$+ \mathrm{i}[-\sin(n+1)\theta + \sin\theta + \sin n\theta]. \qquad ②$$

比较式①，式②，得

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{1-\cos(n+1)\theta - \cos\theta + \cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{-\sin(n+1)\theta + \sin\theta + \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

四、平面几何问题的复数方法

由于复数与平面向量之间的关系，我们可以用复数方法来分析、讨论和求证平面几何问题. 常见的做法是：将平面上的点用复数表示，将平面曲线化为复数形式；或者将点用向量表示，利用向量运算求解. 解决一个几何问题的方法是不惟一的，为了节省篇幅，我们一般都只给出一个我们认为较简捷的解法. 读者可以自己试用别的方法讨论和求解.

例 27 设 z_1, z_2 为任意两个复数，证明：

(1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$；

(2) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$；

(3) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

证 (1) 利用 $|z|^2 = z\bar{z}$ 证明. 因为

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$
$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2,$$

由于 $z_1\bar{z}_2$ 与 $\bar{z}_1 z_2$ 共轭，且

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\bar{z}_1 z_2|$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$
$$= (|z_1| + |z_2|)^2,$$

所以 $$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \quad ③$$

(2) $$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1\bar{z}_2} + z_1\bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2). \qquad ④$$

(3) 将式 ③ 应用于 z_2 及 $z_1 - z_2$，有

$$|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leqslant |z_2| + |z_1 - z_2|,$$

即 $$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|,$$

同理 $$|z_2| = |z_1 + z_2 - z_1| \leqslant |z_1| + |z_2 - z_1|,$$

即 $$|z_1 - z_2| \geqslant |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|) ⓪$$

于是 $$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||. \qquad ⑤$$

式 ⑤ 的几何意义是：三角边任意一边的长不小于其它两边边长之差的绝对值.

将式 ③ 与式 ④ 的结论综合，可得

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 \\ &\quad + |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).\end{aligned}$$

其几何意义是：平行四边形两对角线平方的和等于各边平方的和.

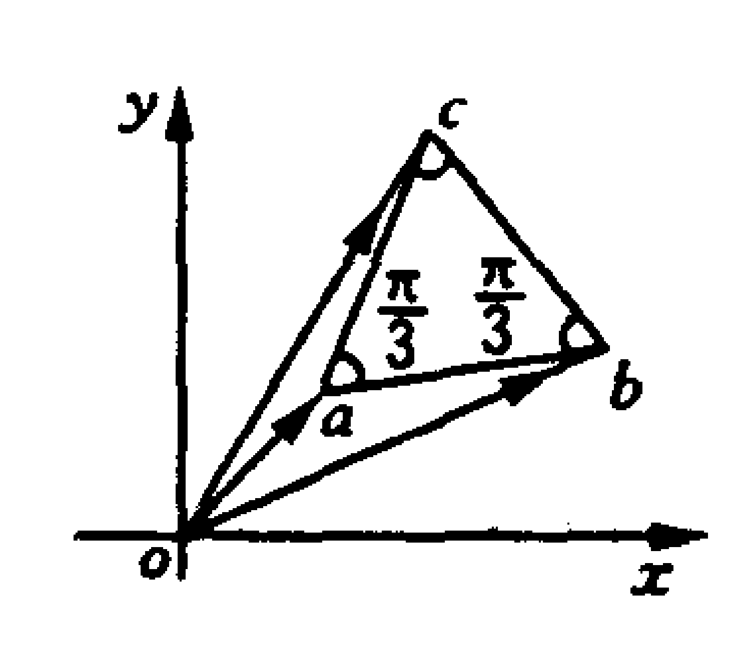


图 1.5

例 28 设复数 a,b,c 对应于等边三角形的三个顶点，证明：

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

证 由图 1.5 可知，向量 $\overrightarrow{ab}$ 转过 $\frac{\pi}{3}$ 得向量 $\overrightarrow{ac}$，$\overrightarrow{bc}$ 转过 $\frac{\pi}{3}$ 得到 $\overrightarrow{ba}$.

又 $|e^{i\pi/3}| = 1, \arg e^{i\pi/3} = \frac{\pi}{3}$. 根据复数的乘法，有

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a),$$

$$a - b = e^{i\pi/3}(c - b),$$

故 $$(c - a)(c - b) = (b - a)(a - b),$$

即 $$c^2 - ac - bc + ab = ba - a^2 - b^2 + ab.$$

所以 $$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

例 29 证明：复数 α, β 所表示的向量互相垂直的充分条件为

$\text{Re}(\alpha\bar{\beta}) = 0.$

证　由图 1.6 可见，向量 α 与 β 互相垂直的充要条件是

$$|\beta - \alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

由于
$$\begin{aligned}|\beta - \alpha|^2 &= (\beta - \alpha)\overline{(\beta - \alpha)} \\ &= (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \\ &= \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) \\ &= |\beta|^2 + |\alpha|^2 - 2\text{Re}(\alpha\bar{\beta}).\end{aligned}$$

图 1.6

所以，可将 α 与 β 互相垂直的充要条件写为 $\text{Re}(\alpha\bar{\beta}) = 0.$

例 30　证明：方程 $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k\ (0 < k \neq 1, z_1 \neq z_2)$ 表示平面上一个圆周，圆心 $z_0 = \dfrac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$，半径 $\rho = \dfrac{k|z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$.

证　由 $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k$，得 $\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right)\left(\dfrac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2}\right) = k^2$，即

$$\begin{aligned}&|\bar{z}|^2 - z_1\bar{z} - \bar{z}_1 z + |z_1|^2 \\ &= k^2(|z|^2 - z_2\bar{z} - \bar{z}_2 z + |z_2|^2), \\ &|z|^2(1 - k^2) - \bar{z}(z_1 - k^2 z_2) - z(\bar{z}_1 - k^2\bar{z}_2) \\ &= k^2|z_2|^2 - |z_1|^2,\end{aligned}$$

化为
$$|z|^2 - \frac{\bar{z}(z_1 - k^2 z_2)}{1 - k^2} - \frac{z(\bar{z}_1 - k^2\bar{z}_2)}{1 - k^2} + \frac{|z_1 - k^2 z_2|^2}{(1 - k^2)^2}$$
$$= \frac{k^2|z^2|^2 - |z_1|^2}{1 - k^2} + \frac{|z_1 - k^2 z_2|^2}{(1 - k^2)^2},$$

即
$$\left(z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{z}_1 - k^2\bar{z}_2}{1 - k^2}\right)$$
$$= \frac{(1 - k^2)(k^2|z_2|^2 - |z_1|^2) + (z_1 - k^2 z_2)(\bar{z}_1 - k^2\bar{z}_2)}{(1 - k^2)^2}.$$

化为
$$\left|z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}\right|^2 = \frac{k^2(|z_2|^2 + |z_1|^2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2)}{(1 - k^2)^2}$$
$$= \frac{k^2|z_1 - z_2|^2}{(1 - k^2)^2},$$

两边开方，得

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k|z_1-z_2|}{1-k^2}.$$

该式是圆心为$\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$、半径为$k\left|\frac{z_1-z_2}{1-k^2}\right|$ $(0<k\neq 1, z_1\neq z_2)$的圆周的方程.

例31 证明：以z_1,z_2,z_3和w_1,w_2,w_3为顶点的两个三角形相似的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=0.$$

证 由复数的几何意义及几何中两三角形相似的判定定理知，两三角形相似应有

$$\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right|,$$

且

$$\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_1)$$
$$=\arg(w_3-w_1)-\arg(w_2-w_1).$$

即

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}.$$

由行列式计算，得

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\z_1&z_2-z_1&z_3-z_1\\w_1&w_2-w_1&w_3-w_1\end{vmatrix}$$
$$=(z_2-z_1)(w_3-w_1)=(z_3-z_1)(w_2-w_1)$$
$$=0,$$

即

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}.$$

显然，二者完全相同，则此题得证.

例32 若β为单位圆内点，α为复平面上点，证明：

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=\begin{cases}1, & \text{当 } |\alpha|=1,\\ <1, & \text{当 } |\alpha|<1,\\ >1, & \text{当 } |\alpha|>1.\end{cases}$$

证 当 $|\alpha|=1$ 时，因为 $\alpha \neq \beta$，所以

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha||1-\bar{\alpha}\beta|}=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\alpha\bar{\alpha}\beta|}=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|}=1.$$

当 $|\alpha|<1$ 时，由

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=|\alpha|^2+|\beta|^2-(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\alpha)$$

及

$$\begin{aligned}|1-\bar{\alpha}\beta|^2&=(1-\bar{\alpha}\beta)(1-\alpha\bar{\beta})\\&=1+|\alpha|^2|\beta|^2-(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\alpha),\end{aligned}$$

而

$$(1-|\beta|^2)|\alpha|^2<1-|\beta|^2,$$

即

$$|\alpha|^2+|\beta|^2<1+|\alpha|^2|\beta|^2,$$

所以

$$\frac{|\alpha-\beta|}{|1-\bar{\alpha}\beta|}<1.$$

当 $|\alpha|>1$ 时，上式中 $(1-|\beta|^2)|\alpha|^2>1-|\beta|^2$，即

$$|\alpha|^2+|\beta|^2>1+|\alpha|^2|\beta|^2.$$

所以

$$\frac{|\alpha-\beta|}{|1-\bar{\alpha}\beta|}>1.$$

等式的几何意义是：当 β 为单位圆内点，而 α 分别为单位圆上、圆内和圆外点时，对应的点 $z=\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}$ 分别在单位圆上、圆内和圆外.

例 33 证明：复平面上的直线方程的一般形式为

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+C=0,$$

其中 $\alpha\neq 0$ 为复数，C 为实数.

证 实平面上的直线方程为

$$Ax+By+C=0,$$

其中 A,B,C 均为实数，且 A,B 不同时为零. 由

$$A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+B\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)+C=0,$$

得

$$\left(\frac{A}{2}-\mathrm{i}\,\frac{B}{2}\right)z+\left(\frac{A}{2}+\mathrm{i}\,\frac{B}{2}\right)\bar{z}+C=0.$$

令 $\alpha=\dfrac{A}{2}+\mathrm{i}\,\dfrac{B}{2}$，即得 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+C=0$，且 $\alpha\neq 0$.

反之，对方程 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+C=0$，设 $\alpha=A+\mathrm{i}B\neq0$，则有

$$(A+\mathrm{i}B)(x-\mathrm{i}y)+(A-\mathrm{i}B)(x+\mathrm{i}y)+C=0,$$

得
$$2Ax+2By+C=0.$$

其中 A,B,C 均为实数，且 A,B 不同时为零.

例 34 证明：复平面上的圆周方程的一般形式为

$$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+C=0,$$

其中 α 为复常数，C 为实常数.

证 实平面上的圆周方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

即
$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+x_0^2+y_0^2-R^2=0.$$

化为 $z\bar{z}-(x_0-\mathrm{i}y_0)z-(x_0+\mathrm{i}y_0)\bar{z}+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0$，

即得
$$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+C=0.$$

其中
$$\alpha=-(x_0+\mathrm{i}y_0),\ C=x_0^2+y_0^2-R^2.$$

将 $z=x+\mathrm{i}y,\alpha=a+\mathrm{i}b$ 代入 $z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+C=0$，得

$$x^2+y^2+(a-\mathrm{i}b)(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)(x-\mathrm{i}y)+C=0.$$

化为
$$x^2+y^2+2ax+2by+C=0,$$

即
$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-C$$

是实平面上的圆周方程.

例 35 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $z_1+z_2+z_3=0$. 证明：z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

证法 1 因为，由本节例 27 推论，有

$$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=4.$$

由 $z_1+z_2+z_3=0\Longrightarrow z_1+z_2=-z_3\Longrightarrow|z_1+z_2|=|z_3|=1$，

得
$$|z_1-z_2|^2=4-1\Longrightarrow|z_1-z_2|=\sqrt{3}.$$

同理
$$|z_2-z_3|=\sqrt{3},|z_1-z_3|=\sqrt{3}.$$

所以，三角形三边长相等且等于 $\sqrt{3}$，z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点.

证法 2 设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\sin\theta_k),k=1,2,3,r_k=1=|z_k|$.

因为 $z_1+z_2+z_3=0$，所以

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0,$$
$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0,$$
$$(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2=(-\cos\theta_3)^2,$$
$$(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2=(-\sin\theta_3)^2.$$

将两边相加，得

$$2+2\cos\theta_1\cos\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2=1,$$

故 $\cos(\theta_2-\theta_1)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta_2-\theta_1=\dfrac{2}{3}\pi.$

同理 $\theta_1-\theta_3=\dfrac{2}{3}\pi.$

于是知，z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点，如图 1.7 所示.

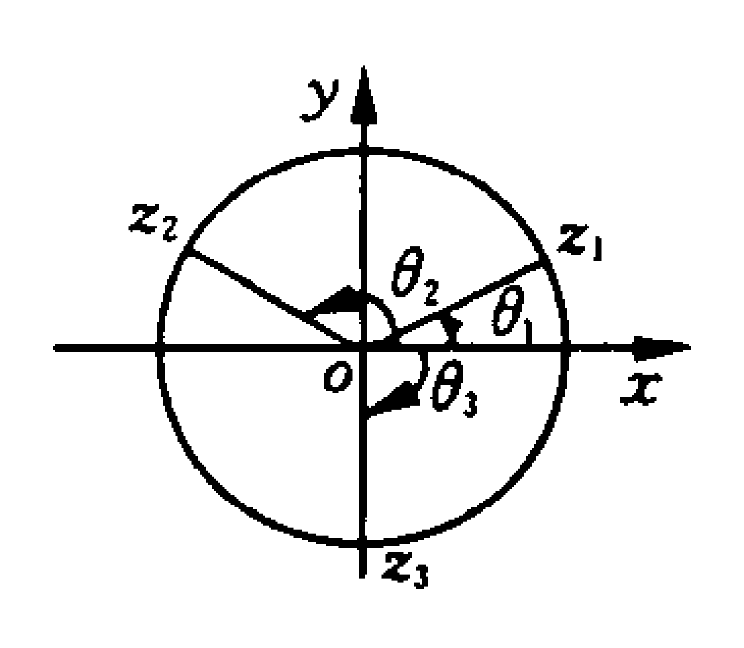


图 1.7

证法 3 因为

$$\begin{aligned}&(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\\&=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2\\&\quad+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z-z_1z_2z_3,\end{aligned}$$

而 $z_1+z_2+z_3=0$，$|z_k|^2=1=z_k\bar{z}_k\Rightarrow\bar{z}_k=\dfrac{1}{z_k}$，

$$\begin{aligned}z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3&=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}\right)\\&=z_1z_2z_3\,\overline{(z_1+z_2+z_3)}=0,\end{aligned}$$

所以 $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-z_1z_2z_3.$

而 $|-z_1z_2z_3|=1$，故 z_1,z_2,z_3 是 $z^3-z_1z_2z_3=0$ 的三个根，是内接于单位圆的正三角形的顶点.

证法 4 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k\quad(k=1,2,3)$，由已知条件可得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\y_1+y_2+y_3=0,\end{cases}\quad x_k^2+y_k^2=1,$$

将 $x_1=-(x_2+x_3)$，$y_1=-(y_2+y_3)$ 代入 $x^2+y^2=1$，得

$$2(x_2x_3+y_2y_3)=-1\xRightarrow{\text{同理}}2(x_1x_2+y_1y_2)=2(x_1x_2+y_1y_3),$$

所以 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2$

$$=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2,$$

即 $$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

于是知，z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点.

例 36 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为复平面上的四个点，证明：

(1) 向量$\overrightarrow{\beta\alpha}$与$\overrightarrow{\delta\gamma}$间的夹角为 $\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$.

(2) 过点 α,β 的直线与过 γ,δ 的直线平行的条件是

$$\operatorname{Im}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0,$$

垂直的条件是

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0.$$

证 (1) 向量$\overrightarrow{\beta\alpha}$与正实轴夹角为 $\arg(\alpha-\beta)$，$\overrightarrow{\delta\gamma}$与正实轴夹角为 $\arg(\gamma-\delta)$，因此$\overrightarrow{\beta\alpha}$与$\overrightarrow{\delta\gamma}$之间的夹角为

$$\arg(\alpha-\beta)-\arg(\gamma-\delta)=\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}.$$

(2) 两直线平行的条件是$\overrightarrow{\beta\alpha}$与$\overrightarrow{\delta\gamma}$平行，因而$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=t$(实数). 所以，$\operatorname{Im}\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0$.

两直线垂直的条件是$\overrightarrow{\beta\alpha}$与$\overrightarrow{\delta\gamma}$垂直，即其辐角相差$\dfrac{\pi}{2}$，有$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=te^{i\pi/2}=t\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=i$ (t 为实数). 所以，$\operatorname{Re}\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0$.

例 37 证明：平面上三点 α,β,γ 共线的充要条件是

$$\operatorname{Im}\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=0,\text{ 即 }\begin{vmatrix}1&1&1\\ \bar{\alpha}&\bar{\beta}&\bar{\gamma}\\ \alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=0.$$

证 α,β,γ三点共线，即向量$\overrightarrow{\beta\alpha}$与$\overrightarrow{\gamma\alpha}$平行，由例36(2)知，$\operatorname{Im}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=0$，即

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=t(\text{实数})\Longrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}},$$

而
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\\bar{\alpha}&\bar{\beta}&\bar{\gamma}\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}=\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}}.$$

例 38 证明：平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件是

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\text{实数}.$$

图 1.8

证 因为 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件是：$\angle z_1z_4z_2=\angle z_1z_3z_2=\theta$，如图 1.8 所示.

由本节例 36(1) 知

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\theta+2k\pi,\ \arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\theta+2k_1\pi,$$

其中 k,k_1 为整数，因此

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)$$
$$=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=2(k-k_1)\pi,$$

即$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ 为实数.

例 39 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$，证明：

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

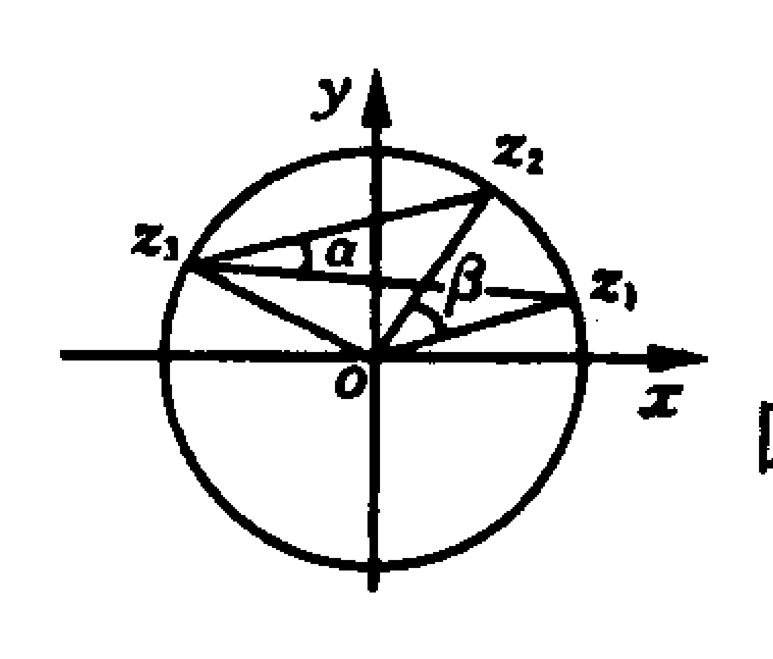


图 1.9

证 因为三点的模相等，所以三点必位于圆心在原点的同一圆周上. 且

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\arg(z_3-z_2)-\arg(z_3-z_1)$$
$$=\alpha,$$

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\arg z_2-\arg z_1=\beta.$$

由图 1.9 可知，α 是圆周角，β 是同一圆弧所对的圆心角，由平

面几何的定理知 $\beta = 2\alpha$. 故

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

第二节　复球面与平面区域

主要内容

一、复球面

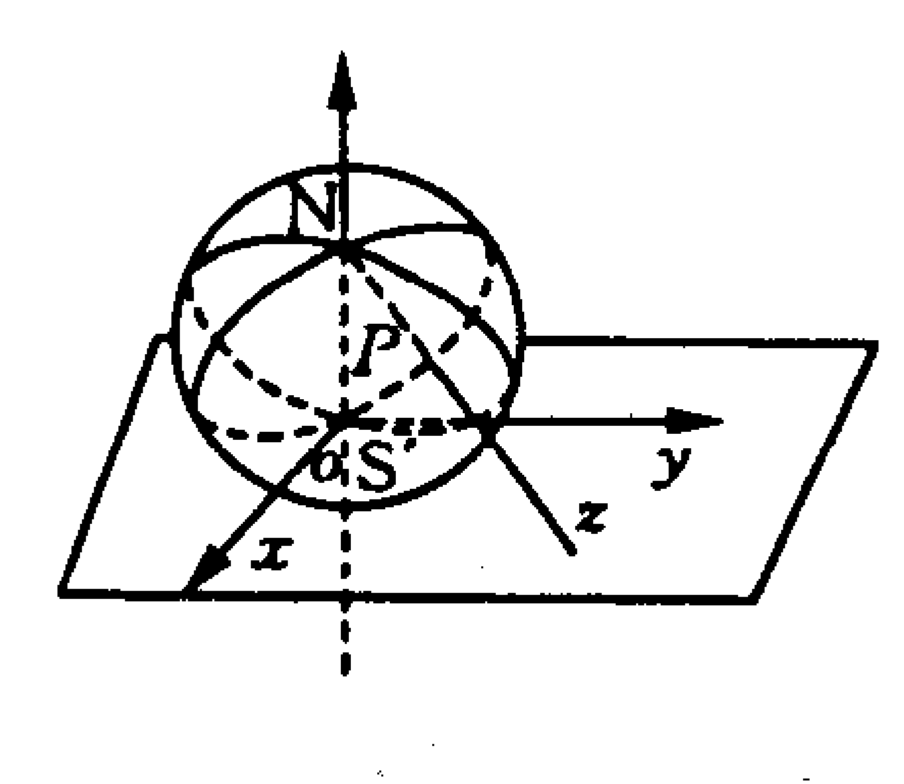


图 1.10

作一个与复平面切于原点 o 的球面. 将原点称为 S(南极)，过 S 且垂直 z 平面的直线与球面交于点 N(北极). 则球面上任一点 P 都有复平面上一点 z 与之对应(规定点 N 与点 ∞ 对应)，因而球面上每一点都有惟一的一个复数 z 与之对应. 球面称为复球面.

二、区域

1. 平面上以 z_0 为中心、$\delta(\delta > 0)$ 为半径的圆 $|z - z_0| < \delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域，$0 < |z - z_0| < \delta$ 称 z_0 的去心邻域.

2. 设 D 为平面点集. 若对任一 $z_0 \in D$，存在 z_0 的一个邻域，使邻域内的点全属于 D，则称 z_0 为 D 的内点；若 D 的每个点都是内点，则 D 称为开集.

若 D 是一个开集，且 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的折线连接起来，则 D 是连通的，称为一个区域.

若 $P \overline{\in} D$，但在 P 的任意小邻域内总含有 D 的点，称 P 为 D 的边界点，D 的所有边界点组成 D 的边界(不一定连续).

区域 D 及其边界构成闭区域 $\overline{D}$.

若一个区域D内的所有点z满足$|z|<M$,则称D是有界的.

3. 单连通域与多连通域

(1) 设$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,其中$x(t),y(t)$是实变量$t$的连续函数,则$z(t)$表示复平面上的连续曲线$C$.若对$t$的每一值,$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$,则称$z(t)$为光滑曲线.$z(a)$和$z(b)$称为曲线$C$的起点与终点.若对$a<t_1<b,a\leqslant t_2\leqslant b$,当$t_1\neq t_2$而有$z(t_1)=z(t_2)$时,点$z(t_1)$称为曲线$C$的重点.没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当(Jardan)曲线.

任意一条简单闭曲线C把复平面分为三个不相交的点集:有界区域,称为C的内部;无界区域,称为C的外部;C,称为内部与外部的边界.

(2) 若在复平面上区域B内任作一条简单闭曲线,其内部总属于B,则称B为单连通域.若B不是单连通域,则B是多连通域.

疑难解析

1. 为什么在复平面中规定无穷远点只是一个点?

答 在实数中,∞分为$+\infty$与$-\infty$,对应于数轴两端无限远处的点,而在复平面上只有惟一的无限远点∞.这是因为,由复球面上点与复平面上点的一一对应性,复球面的北极N与拓广的复平面上惟一的无穷远点构成一一对应.

引入唯一的无穷远点在理论上有重大的意义,它不仅可以作为复平面惟一的边界点,而且还可以存在自己的邻域.

2. 无穷远点的数学意义是什么?它存在哪些运算?

答 复平面加上无穷远点后称为扩充复平面或拓广复平面.复平面又称为有限复平面.

复数∞的实部、虚部和辐角均无意义,复数∞的模规定为$|\infty|=+\infty$.规定关于∞的四则运算为

$$a+\infty=\infty+a=\infty,\ a-\infty=\infty-a=\infty,$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, \ \frac{a}{\infty} = 0, \frac{\infty}{a} = \infty, \frac{a}{0} = \infty.$$

其中 a 是不等于 ∞ 的复数(又称为有限点).

3. 复数平面区域的概念与微积分中二元函数区域的概念是否相同?

答　可以认为相同.因为复数 z 对应复平面上的点 (x,y),所以复数与微积分中二元函数有密切的关系.如对复变函数 $w=f(z)$ 的研究就可以化为对一对实二元函数的研究,从而使我们可以利用微积分中学到的知识来分析、讨论和解决问题.

4. 集合 G 的内点与聚点(或极限点)有什么区别?

答　若对于集合 G,z_0 为平面上一点,若在 z_0 的任一邻域内都含有 G 的无穷多个点,则称 z_0 为 G 的一个聚点.以下五个说法是互相等价的:

(1) z_0 为 G 的聚点;

(2) z_0 的任一邻域内含有 G 的无穷多个点;

(3) z_0 的任一邻域内至少含有异于 z_0 而属于 G 的一个点;

(4) z_0 的任一邻域内至少含有 G 的两个点;

(5) 可在 G 中取出点列 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ $(z_n \neq z_0)$,而 z_n 以 z_0 为极限.即对任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,$|z_n-z_0|<\varepsilon$.

属于 G 又不是 G 的聚点的点称为 G 的孤立点.

聚点与内点不同.内点是聚点,但聚点不一定属于 G,不一定是内点.如 0 是点列 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 的聚点,但不是内点.边界点可能是聚点,也可能不是.

方法、技巧与典型例题分析

平面区域问题主要是认识数与形之间的关系,即由等式或不等式确定平面区域的图形,或由平面区域的图形写出其等式或不等式表示.解此类问题主要利用平面几何知识与复数的基本概念

进行，注意几个条件共同满足下区域的确定.

例 1 试写出复平面上圆的几种表示式.

解 常用的圆的表示式有三种.

$|z-z_0|=r$，表示以 z_0 为圆心、r 为半径的圆周.

$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+C=0$，$\alpha$ 为复数，C 为实数.

$z=z_0+re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 表示以 z_0 为圆心、半径为 r 的圆周.

$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+C=0$ 表示圆周，可参看上节例 34 的证明.

由 $|z-z_0|=r\Longrightarrow|z-z_0|^2=r\Longrightarrow(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2$ 化为 $z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}-r^2=0$，即有上面的形式.

又由 $|z-z_0|=r$，则 $z-z_0=re^{i\theta}\Longrightarrow z=z_0+re^{i\theta}$.

例 2 满足下列关系式

$$\cos\theta<r<2\cos\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

的点 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是否构成区域？若构成区域，是单连通域还是复连通域？

解 由 $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 知，

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

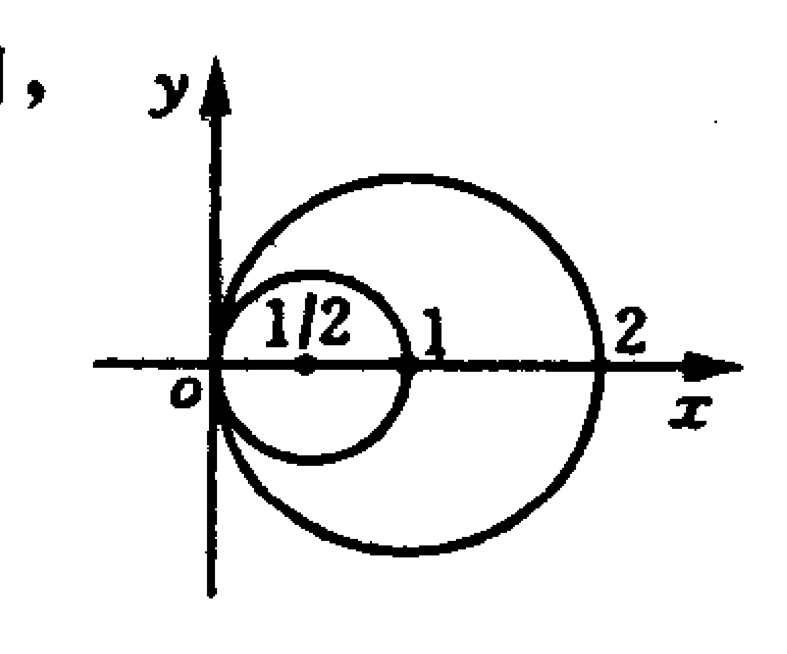


图 1.11

因为 $\cos\theta<r<2\cos\theta$，所以

$$x<x^2+y^2<2x.$$

得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 和 $(x-1)^2+y^2<1$. 故满足关系式的点集充满以 $z_0=1$ 为圆心、半径为 1 的圆内部，而在以 $z=\frac{1}{2}$ 为圆心、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆外部区域(见图 1.11).

例 3 一个矩形的内部是不是区域？它的内部加上它边界上的一点是不是区域？它的内部加上它外部的一点是不是区域？为什么？

答 矩形的内部是一个区域，因为它满足是一个开集、并且

单连通这两个要求.

矩形内部加上它边界上的一点 P_1 不是区域，因为这时 P_1 不是内点，所以不是开集.

同理，矩形内部加上它外部的一点 P_2 也不是一个区域.

例 4 设集合 G 为所有满足 $|z|<1$ 的点 z 所构成，证明：

(1) 对任一 $z_0 \in G$，z_0 为内点，G 为开集；

(2) 集合 $|z| \leqslant 1$ 上任一点 z_1 都是 G 的聚点，$|z| \leqslant 1$ 是闭集；

(3) 集合 $|z|>1$ 上任一点 z_2 都是 G 的外点.

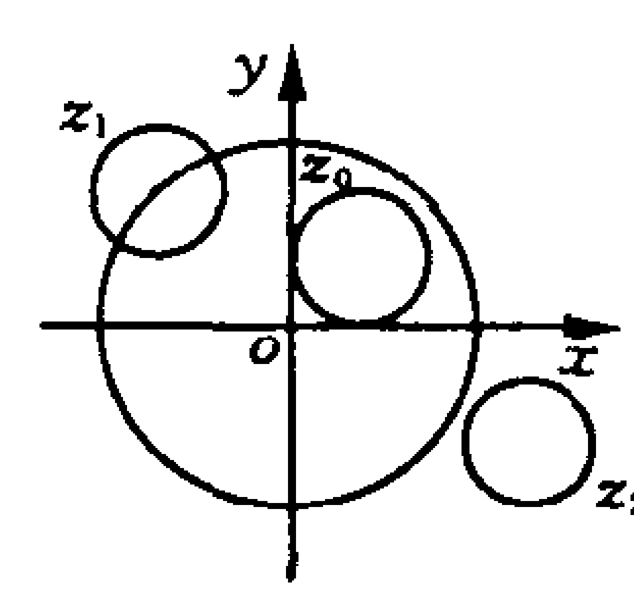


图 1.12

证 (1) 对于 G 中任一点 z_0，都可以构造一个位于 G 内的、圆心为 z_0、半径小于 $1-|z_0|$ $(|z_0|<1)$ 的圆 $S(z_0)$. 所以 z_0 为内点，且 $|z|<1$ 为开集.

(2) 显然，G 中每一点都是聚点. 而对 z_1，若 $|z_1|=1$，则 z_1 的任一邻域内含有 G 的无穷多个点，故也是 G 的聚点. 因而，集合 $|z|<1$ 的所有聚点的集合为 $|z| \leqslant 1$，即 $|z| \leqslant 1$ 为闭集.

(3) 对任何一个 $|z_2|>1$ 的点 z_2，可以构造一个以 z_2 为中心、半径小于 $|z_2|-1$ 的圆 $S(z_2)$，圆中任何一个点都不属于 $|z|<1$. 所以，z_2 为 G 的外点.

其图形如图 1.12 所示.

例 5 证明：由圆 $|z-1|<1$ 与 $|z+1|<1$ 的内部所成的集合 E 是开集但不是区域.

证 如图 1.13 所示，因为 E 全部由内点组成，所以 E 是开集. 但是，E 不是连通的，对于 $|z-1|<1$ 内任一点 z_1 和 $|z+1|<1$ 内任一点 z_2，无法用一条完全属于 E 的折线连接起来，所以 E 不是一个区域.

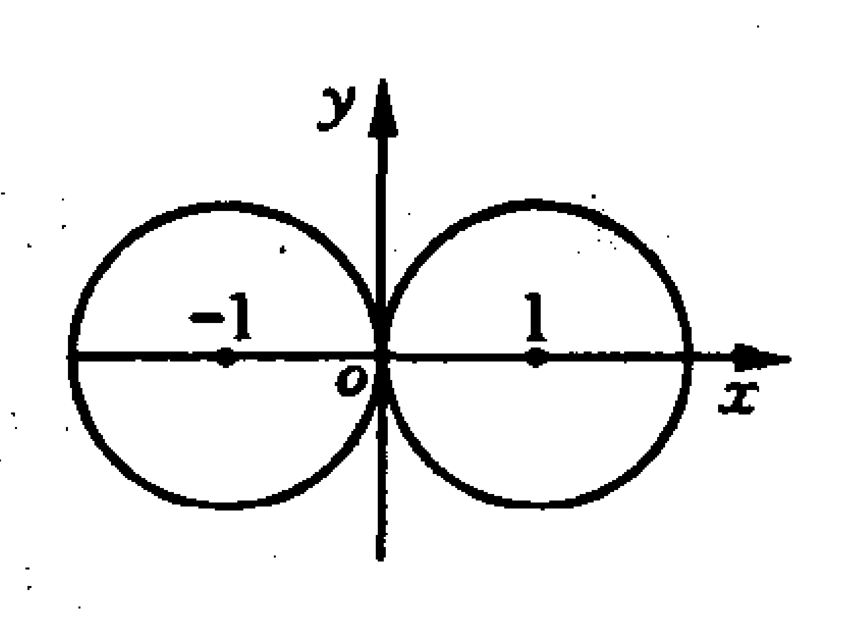


图 1.13



例 6 指出下列各题中点 z 的轨迹或所

在区域，并作图.

(1) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$；　(2) $|z-z_1|=|z-z_2|$；

(3) $|z+1|+|z-2|=5$；　(4) $|z-3|-|z+2|=1$；

(5) $\mathrm{Im}(z^2)>1$；　(6) $|z|+\mathrm{Re}|z|<1$；

(7) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1$；　(8) $b_1<\mathrm{Im}(z)<b_2$.

分析 一般用两种方法来进行分析和确定.一是由几何方法分析，将等式或不等式变形，找出动点的轨迹，然后画出图形；二是由代数方法分析，将等式或不等式化为曲线的标准方程，从而确定轨迹与图形.

解 (1) 用几何方法.由

$$\mathrm{Re}(z+2)=-1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(2)=-1 \Rightarrow R=-3$$

知，动点实部等于-3，虚部任意，是过点$z=-3$且平行虚轴的直线(见图1.14a).

用代数方法.可设$z=x+\mathrm{i}y$，由$\mathrm{Re}(z+2)=-1$，得$x=-3$，y任意，是过点$z=-3$且平行虚轴的一条直线.

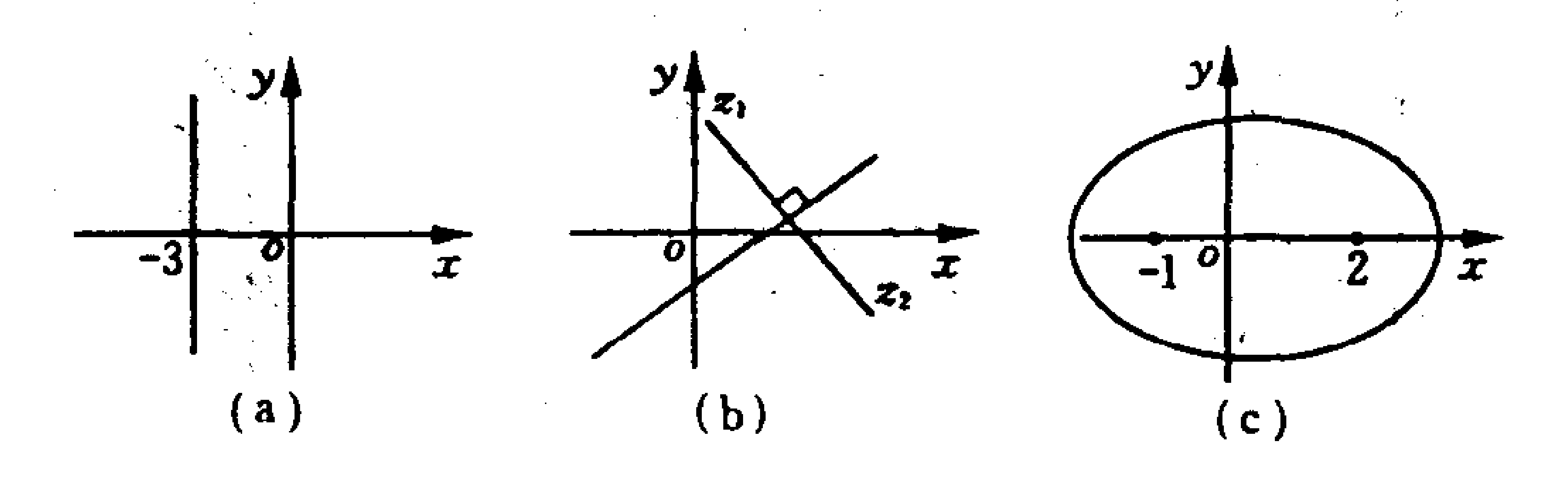


图 1.14

(2) 用几何方法.知动点z到z_1和z_2距离相等，所以z的轨迹是线段$\overline{z_1z_2}$的垂直平分线.

用代数方法.令$z=x+\mathrm{i}y$，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，代入方程$|z-z_1|=|z-z_2|$得

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

两边平方后经整理得

$$y-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

是一条直线，且过 $\overline{z_1z_2}$ 的中点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，斜率 $k=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$（而 $\overline{z_1z_2}$ 的斜率为 $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$）. 故该直线是 $\overline{z_1z_2}$ 的垂直平分线（见图 1.14b）.

下面各题我们只给出一种分析方法，请读者自己尝试用其它方法分析.

(3) 等式表示到点 $z_1=-1$ 的距离到点 $z_2=2$ 的距离之和为 5 的动点 z 的轨迹. 由解析几何知识知，这是一个以 $z_1=-1$ 与 $z_2=2$ 为焦点的椭圆（见图 1.14c）.

(4) 等式表示到点 $z_1=3$ 的距离与到点 $z_2=-2$ 的距离之差为 1 的动点 z 的轨迹. 由解析几何知识知，这是一对以点 $z_1=3$ 和 $z_2=-2$ 为焦点的双曲线（见图 1.15a）.

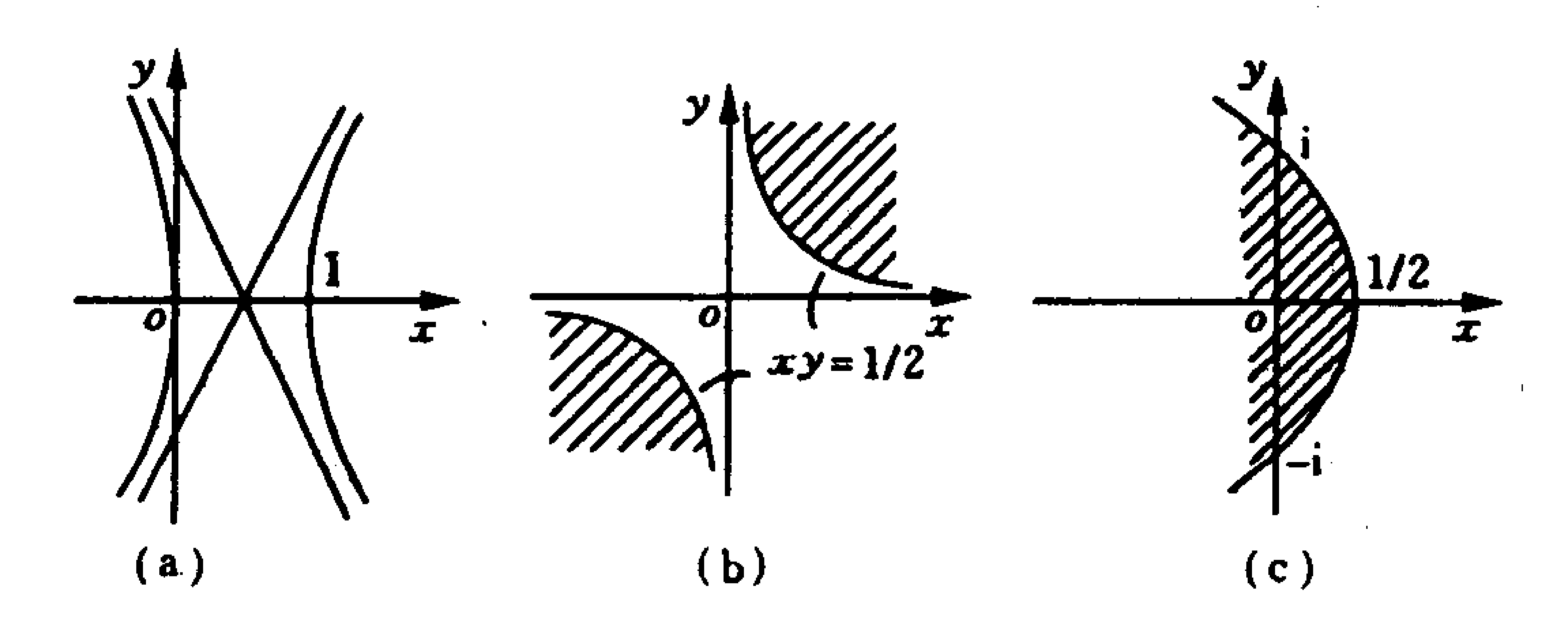


图 1.15

(5) 设 $z=x+iy$，则 $z^2=x^2-y^2+2ixy$. 由 $\mathrm{Im}(z^2)>1$ 得 $2xy>1$，即 $xy>\frac{1}{2}$，是双曲线外区域（见图 1.15b）.

(6) 设 $z=x+iy$，则不等式化为 $\sqrt{x^2+y^2}+x<1$，即

$$\sqrt{x^2+y^2}<1-x\Rightarrow y^2<-2\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

是抛物线左边区域（见图 1.15c）.

(7) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $|z-1|\leqslant|z+1|$ 化为

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\leqslant\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

平方后化简，得 $x\geqslant 0$，是包括虚轴在内的右半平面(见图 1.16a).

(8) $b_1<\operatorname{Im}(z)<b_2$ 表示虚部介于 b_1 与 b_2 间的复数 z 形成的带形域(见图 1.16b).

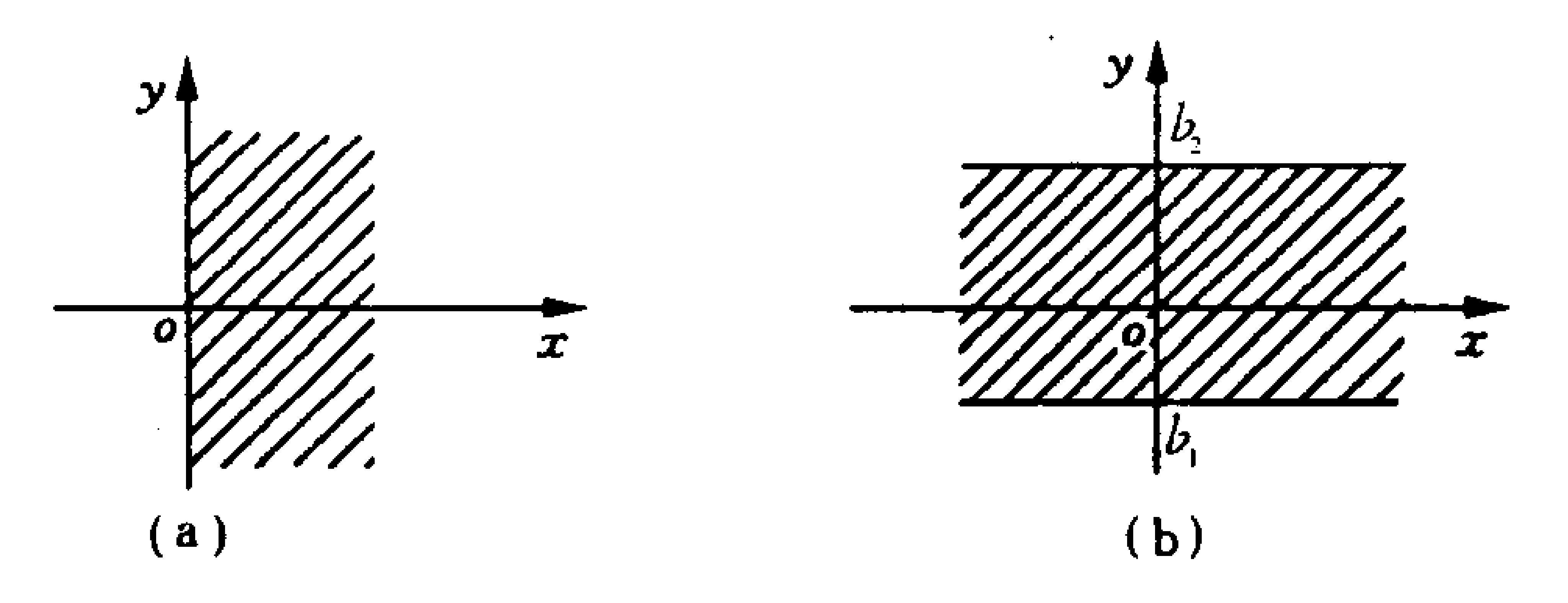


图 1.16

例 7 满足下列条件的点集是什么？如果是区域，是单连通域还是多连通域？

(1) $\operatorname{Im}(z)=3$； (2) $\operatorname{Re}(z)>\dfrac{1}{2}$； (3) $|z-\mathrm{i}|\leqslant|z+\mathrm{i}|$；

(4) $|\operatorname{Re}(z)|>1$； (5) $|z|<1,\operatorname{Re}(z)\leqslant\dfrac{1}{2}$；

(6) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4},\ 2<\operatorname{Re}(z)<3$；

(7) $z+|z|\neq 0$.

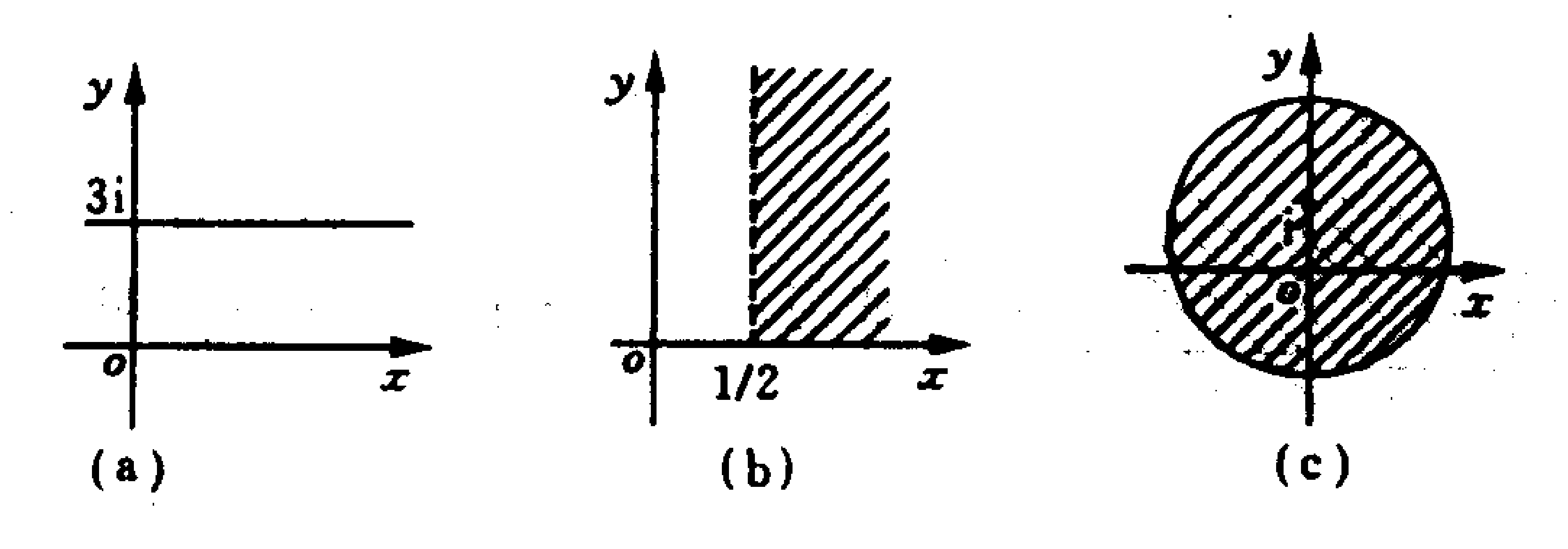


图 1.17

解 (1) 是过点 3i 且平行于实轴的一条直线，不是区域(见图

1.17a).

(2) 是以 $z = \frac{1}{2}$ 为左边界(不含)的右半平面(见图 1.17b),是单连通域.

(3) $|z - \mathrm{i}| \leqslant |2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$,是以 i 为圆心、$\sqrt{5}$ 为半径的圆域,是一个闭区域、单连通域(见图 1.17c).

(4) 是直线 $x = -1$ 左半平面,直线 $x = 1$ 右半平面(不含直线),是开集不是区域(见图 1.18a).

(5) 是以原点为圆心、1 为半径的圆内部,直线 $y = \frac{1}{2}$(含直线)左边,是闭区域、单连通域(见图 1.18b).

(6) 是以直线 $x = 2$ 和 $x = 3$ 为平行边,直线 $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4}$ 和实轴为两腰的梯形内部,是单连通域(见图 1.18c).

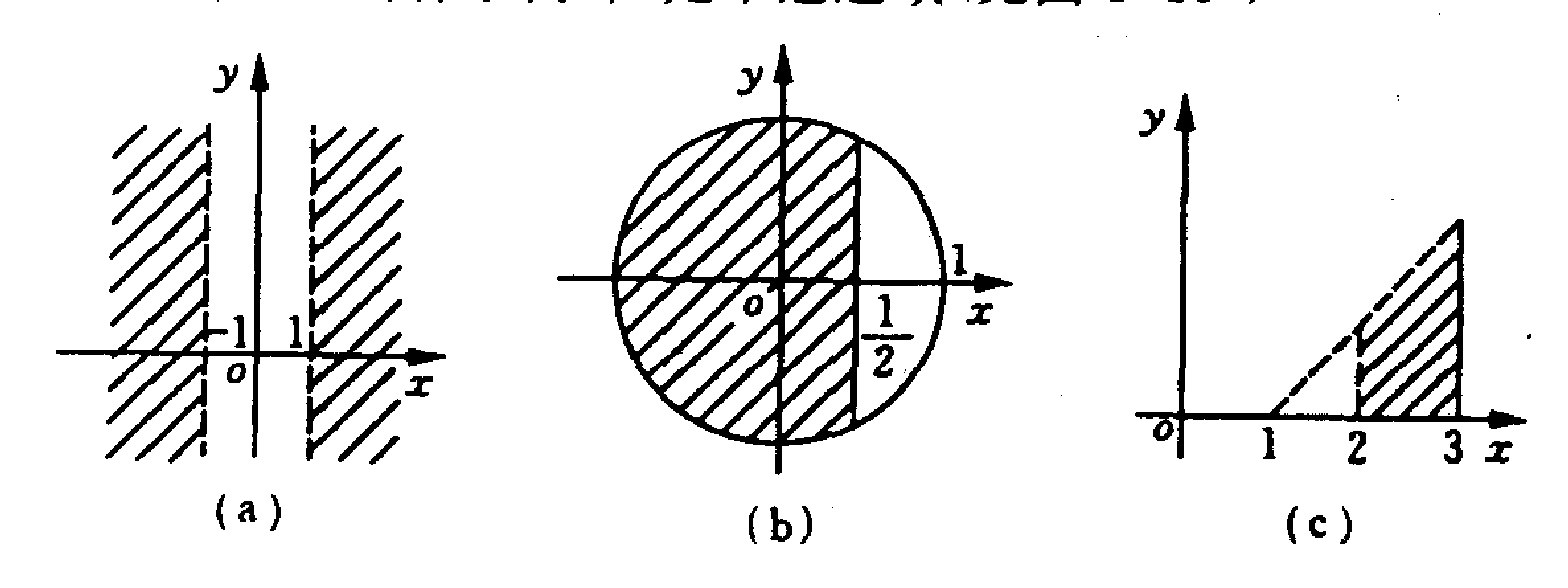


图 1.18

(7) 设 $z = x + \mathrm{i}y$,则 $z + |z| \neq 0$ 化为 $x + \sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}y \neq 0$,即为一个去掉负实轴与原点的平面,是单连通域(见图 1.19).

图 1.19

例 8 下列方程表示什么样的曲线?

(1) $z = 1 + \mathrm{i}t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$;

(2) $z = 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$;

(3) $z = 1 + \mathrm{i}t + t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$;

(4) $\mathrm{Re}(z^2)=b^2$，b 为实常数；

(5) $|z+a|+|z-a|=b$，a，b 均为正实数；

(6) $|z-a|=\mathrm{Re}(z-b)$，a，b 均为实常数.

解 (1) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得 $x=1$，$y=t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，是由点 $z_1=1$ 到点 $z_2=1+\mathrm{i}$ 的直线段.

(2) 因为 $3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}=3\cos 2\pi t+3\mathrm{i}\sin 2\pi t$，所以 $x=3\cos 2\pi t$，$y=3\sin 2\pi t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，是以 $z_0=0$ 为圆心、3 为半径的圆周(逆时针方向).

(3) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得 $x=1+t^2$，$y=t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，是抛物线 $y^2=x-1$ 上由点 $z_1=1$ 到点 $z_2=2+\mathrm{i}$ 的一段弧.

(4) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得 $\mathrm{Re}[(x^2-y^2)+\mathrm{i}2xy]=b$，即 $x^2-y^2=b$，是一组双曲线.

(5) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，得

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=-\sqrt{(x-a)^2+y^2}+b,$$

两边平方后化简，得

$$-4ax-b^2=-2b\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

两边再平方后化简，得

$$\frac{x^2}{b^4/(4b^2-16a^2)}+\frac{y^2}{b^2/4}=1.$$

当 $b>2a$ 时，z 的轨迹为一椭圆；当 $b=2a$ 时，z 的轨迹缩为一点.

(6) 原式化为 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x-b$，两边平方，得

$$(x-a)^2+y^2=(x-b)^2,$$

即

$$y^2-(b^2-a^2)=2(a-b)x,$$

是一条开口向右的抛物线.

例 9 写出下列点集的内点、外点和边界点.

(1) $0\leqslant\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)<4$； (2) $0\leqslant\arg<\dfrac{\pi}{4}$，$|z|>3$.

解 (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)=-y$，于是

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(iz) < 4 \Rightarrow -4 < y \leqslant 0.$$

内点集合：$\{z = x + iy \mid -4 < y \leqslant 0\}$；

外点集合：$\{z = x + iy \mid y > 0 \cup y < -4\}$；

边界点集合：$\{z = x + iy \mid y = 0 \cup y = -4\}$.

(2) 设 $z = re^{i\theta}$，由 $|z| > 3, 0 \leqslant \arg z < \frac{\pi}{4}$，于是

内点集合：$\left\{z = re^{i\theta} \middle| 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, r > 3\right\}$；

外点集合：$\left\{z = re^{i\theta} \middle| \frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi, r < 3\right\}$；

边界点集合：$\left\{z = re^{i\theta} \mid \theta = 0 \text{ 且 } r \geqslant 3, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 且 } r \geqslant 3, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ 且 } r = 3\right\}$.

例 10 下式表示什么样的曲线：

(1) $\arg \frac{z-1}{z+1} = \alpha$；　　(2) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \alpha$，$\alpha$ 为实数.

解 (1) 由 $z = x + iy, z + 1 = x + 1 + iy, z - 1 = x - 1 + iy$，得

$$\arg \frac{z-1}{z+1} = \arctan \frac{y}{x-1} - \arctan \frac{y}{x+1} = \arctan \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \alpha,$$

所以
$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \tan\alpha,$$

即 $x^2 + y^2 - 1 = 2y\cot\alpha \Rightarrow x^2 + (y - \cot\alpha)^2 = \csc^2\alpha$，

是一圆心为 $\cot\alpha$、半径为 $\csc\alpha$ 的圆周.

(2) 由 $z = x + iy$，得

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = a\sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

化简得 $(1 - a^2)(x^2 + y^2) - 2(1 + \alpha^2)x + (1 - \alpha^2) = 0$. 当 $\alpha = 1$ 时是直线 $x = 0$，当 $\alpha \neq 1$ 时是圆周.

第三节　复变函数、极限与连续性

主要内容

一、复变函数

1. 设 G 是一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的集合，如果存在一个确定的法则，使对于集合 G 中的每一个复数 z 都有一个或几个复数 $w = u + \mathrm{i}v$ 与之对应，则称复变数 w 是复变数 z 的函数，记作 $w = f(z)$. 若一个 z 值对应 w 的一个值，则函数是单值的；若一个 z 值对应 w 的多个值，则函数是多值的.

2. 用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，用 w 平面上的点表示函数 w 的值，则函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看作 z 平面上一个点集 G(定义集合) 到 w 平面上一个集合 G^*(函数值集合) 的映射(变换)，又称为 $w = f(z)$ 构成的映射. z 称为 w 的原像，w 称为 z 的映像.

3. 若函数 $w = f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的 G，函数值集合为 w 平面上的 G^*，则 G^* 中的每一个点 w 必对应 G 中的一个(或几个) 点，于是在 G^* 上确定了一个单值(或多值) 函数 $z = \varphi(w)$，称为函数 $w = f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

对任意 $w \in G^*$，有 $w = f[\varphi(w)]$.

当反函数为单值时，有 $z = \varphi[f(z)], z \in G$.

若 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 都是单值的，则称函数(映射)$w = f(z)$ 是一一对应的. 也称集合 G 和 G^* 是一一对应的. 若 $z_1 \neq z_2$，$f(z_1) \neq f(z_2)$，$w = f(z)$ 称为单叶函数.

二、复变函数的极限

1. 设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$

时，若有一确定的数A存在，对于任给的$\varepsilon>0$，恒有一正数$\delta(\varepsilon)$ $(0<\delta\leqslant\rho)$，使得当$0<|z-z_0|<\delta$时，有$|f(z)-A|<\varepsilon$，则称A为$f(z)$当z趋向于z_0时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad 或 \quad f(z)\to A\ (z\to z_0).$$

注意 z趋向于z_0的方式是任意的.

2. 极限计算有以下两个定理.

定理 1 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

即复变函数$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的极限存在等价于其实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$的极限同时存在.

定理 2 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A+B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

三、复变函数的连续性

1. 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数$f(z)$在$z_0$连续. 如果$f(z)$在区域$D$内处处连续，称$f(z)$在$D$内连续.

2. 关于连续性有以下两个定理.

定理 3 函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处连续的充要条件是：$u(x,y)$和$v(x,y)$在$(x_0,y_0)$连续，即复变函数$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$连续等价于其实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$同时在$(x_0,y_0)$连续.

定理 4 (1) 在z_0连续的两个函数$f(z)$与$g(z)$的和、差、积、商(分母在z_0不为零)在z_0仍连续.

(2) 如果函数 $h = g(z)$ 在 z_0 连续，函数 $w = f(z)$ 在 $h_0 = g(z_0)$ 连续，则复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 z_0 连续.

3. 有理整函数 $w = P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ 在复平面上处处连续.

有理分式函数 $w = P(z)/Q(z)$ ($P(z),Q(z)$ 是有理整函数) 在复平面上使分母不为零的点处处连续.

若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), z \in C$，则称函数 $f(z)$ 在曲线 C 上连续.

4. 有界闭集上连续函数的性质

设 $\overline{G}$ 为复平面上的有界闭集，函数 $w = f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上连续，则

(1) 函数 $f(z)$ 在闭集 $\overline{G}$ 上有界，即存在常数 M，使对于任何 $z \in \overline{G}$，都有 $|f(z)| \leqslant M$.

在闭曲线或包含曲线端点在内的曲线段上连续的函数 $f(z)$ 在闭曲线上有界，即有 $|f(z)| \leqslant M$.

(2) 函数 $|f(z)|$ 在闭集 $\overline{G}$ 上达到最大值与最小值，即在 $\overline{G}$ 上存在 z' 和 z''，使得 $z \in \overline{G}$，且

$$|f(z')| \leqslant |f(z)| \leqslant |f(z'')|.$$

(3) 函数 $f(z)$ 在闭集 $\overline{G}$ 上一致连续.

疑 难 解 析

1. 函数、映射和变换是否是同一概念？

答 函数、映射和变换都是一种对应关系的反映，它们是同一概念. 在分析中，习惯把变量之间的对应关系称为函数，如 $w = f(z)$ 就反映在确定的法则下，集合 G 中的数 z 与集合 G^* 中的数 w 的一种函数关系；在几何中，习惯把两个点集之间的对应关系称为映射，如 $w = f(z)$ 就反映 z 平面上一个点集 G 与 w 平面上一个点集 G^* 的映射关系；而代数中，又把变量之间的对应关系称为变换，如 $w = f(z)$ 就反映集合 G 到集合 G^* 的变换关系.

因此，在复变函数中我们不再区分函数、映射和变换，而把它们都看作 z 平面上集合 G 与 w 平面上集合 G^* 之间的一种对应.

2. 复变函数 $w=f(z)$ 与实变函数有什么关系?

答 设 $z=x+\mathrm{i}y, w=u+\mathrm{i}v$，则 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，所以一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于定义两个实变函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$. 讨论一个复变函数 $w=f(z)$ 的极限与连续性就需要讨论两个实二元函数的极限与连续性.

复变函数的定义虽然在形式上与实一元函数的定义几乎完全一致，但反映的实质却不相同. 复变函数反映 z 平面上点集 G 与 w 平面上点集 G^* 的对应关系，需要两个平面来表示；而实一元函数反映两个实轴上点集之间的对应关系，只需用一个平面上的一条曲线就可以直观地表示，显然要简单得多.

3. 为什么在复变函数的极限概念中，要强调 $z\to z_0$ 的方式是任意的?

答 复变函数 $w=f(z)$ 当 $z\to z_0$ 的极限与实变函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限在形式上与叙述方法上几乎一致，但要求却大不相同.

对极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 而言，x 只能在 x 轴上取值，$x\to x_0$ 只能从左、从右或时左时右地在直线方向上发生. 而对极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 来说，z 在复平面上取值，$z\to z_0$ 可以从任意方向、以任意方式发生. 所以，必须强调在 $z\to z_0$ 的任意方式下极限的惟一性，因而对函数的要求更高，更严格.

但是，两个极限的几何意义是完全相同的. 即只要 z(或 x) 进入 z_0(或 x_0) 的 δ 邻域，它的像点 $f(z)$(或 $f(x)$) 就进入 A 的 ε 邻域，只是以圆形的 δ 邻域代替了数轴上的 δ 邻域. 正因为如此，$f(z)$ 与 $f(x)$ 有相同的极限运算法则.

方法、技巧与典型例题分析

一、复变函数概念

处理复变函数问题首先想到的应该是它与实二元函数的关系，因此要以实二元函数的要求来进行讨论. 因为函数、映射和变换是一致的，我们还可以用几何和代数方法进行讨论.

例 1 求下列函数的定义域，并判断这些函数在定义域内是否为连续函数.

(1) $w = |z|$；　(2) $w = z^3$；　(3) $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$；

(4) $w = \sqrt[3]{z^3}$；　(5) $w = \sqrt{z^2-3z+2}$；

(6) $w = \sqrt{z^2+(2-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}}$.

解 (1) 定义域是整个复平面. 因为 $||z|-|z_0|| \leqslant |z-z_0|$ 对任意 z_0 都成立，所以，$w = |z|$ 在全平面都连续.

(2) 定义域是全平面. 因为 $w = z$ 在全平面连续，所以 $w = z^3$ 在全平面连续.

(3) 定义域是除去点 $z = -2$ 的全平面. 因为分子、分母都是在全平面连续的多项式，所以 $w = (2z-1)/(z-2)$ 在定义域内连续.

(4) 定义域为全平面. 因为 $w = \sqrt[3]{z^3}$ 定义的三个单值函数

$$\begin{aligned}(|z|^3)^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\arg z+2k\pi)/3} &= |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z+2k\pi/3)}\\ &= z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/3},\ k=0,1,2\end{aligned}$$

都在全平面连续，所以 $w = \sqrt[3]{z^3}$ 在全平面连续.

(5) 因为 $z^2-3z+2 = (z-1)(z-2)$，$w = \sqrt{z^2-3z+2}$ 确定两个单值函数

$$|z-1|^{1/2}|z-2|^{1/2}\mathrm{e}^{[2k\pi+\arg(z-1)+\arg(z-2)]/2},\ k=0,1,$$

其定义域为除去连接 1 与 2 直线段的全平面. 又因模与辐角都连

续，所以实部与虚部都连续，函数在定义域内连续.

(6) 因为 $z^2+(2-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(z+2)$，则函数确定了两个单值函数

$$|z-\mathrm{i}|^{1/2}|z+2|^{1/2}\mathrm{e}^{[\arg(z-\mathrm{i})+\arg(z+2)+2k\pi]/2},\ k=0,1,$$

其定义域为除去连接 i 与 -2 的直线段的全平面，因为模与辐角都连续，其实部与虚部都连续，所以函数在定义域上连续.

例 2 在映射 $w=z^2$ 下，下列 z 平面上的图形映为 w 平面上的什么图形？

(1) $0<r<2,\theta=\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},0<r<2$；

(3) $x^2-y^2=C_1,2xy=C_2$；(4) $x=\lambda,\ y=\mu$.

解 $w=z^2$ 对应于两个二元实函数：$u=x^2-y^2,v=2xy$. 通过关于乘法的模与辐角的定理知，映射 $w=z^2$ 使 z 的辐角增加一倍. 因此

(1) 记 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则 $0<r<2,\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 映为 w 平面内虚轴上自点 0 到 4i 的一段(见图 1.20a)，即

$$0<\rho<4,\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

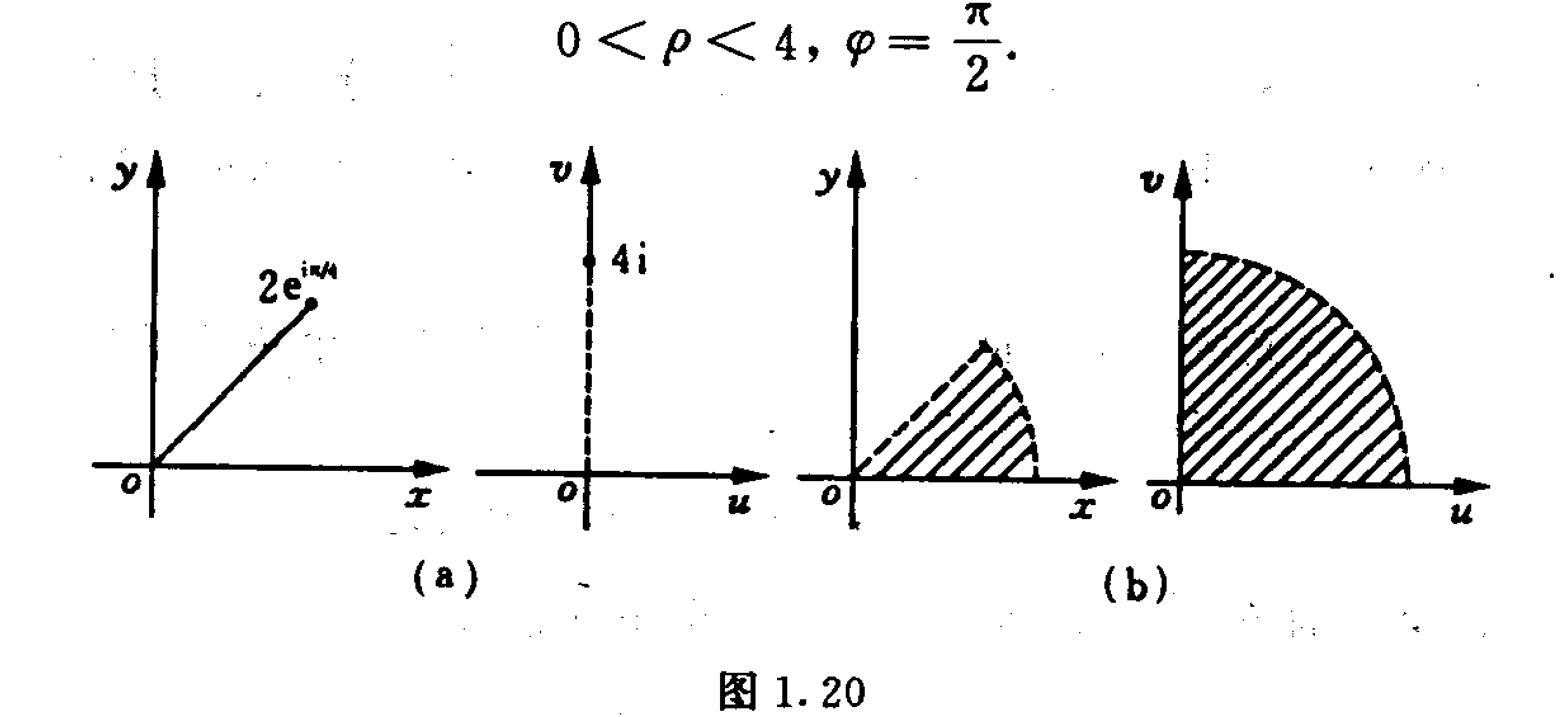
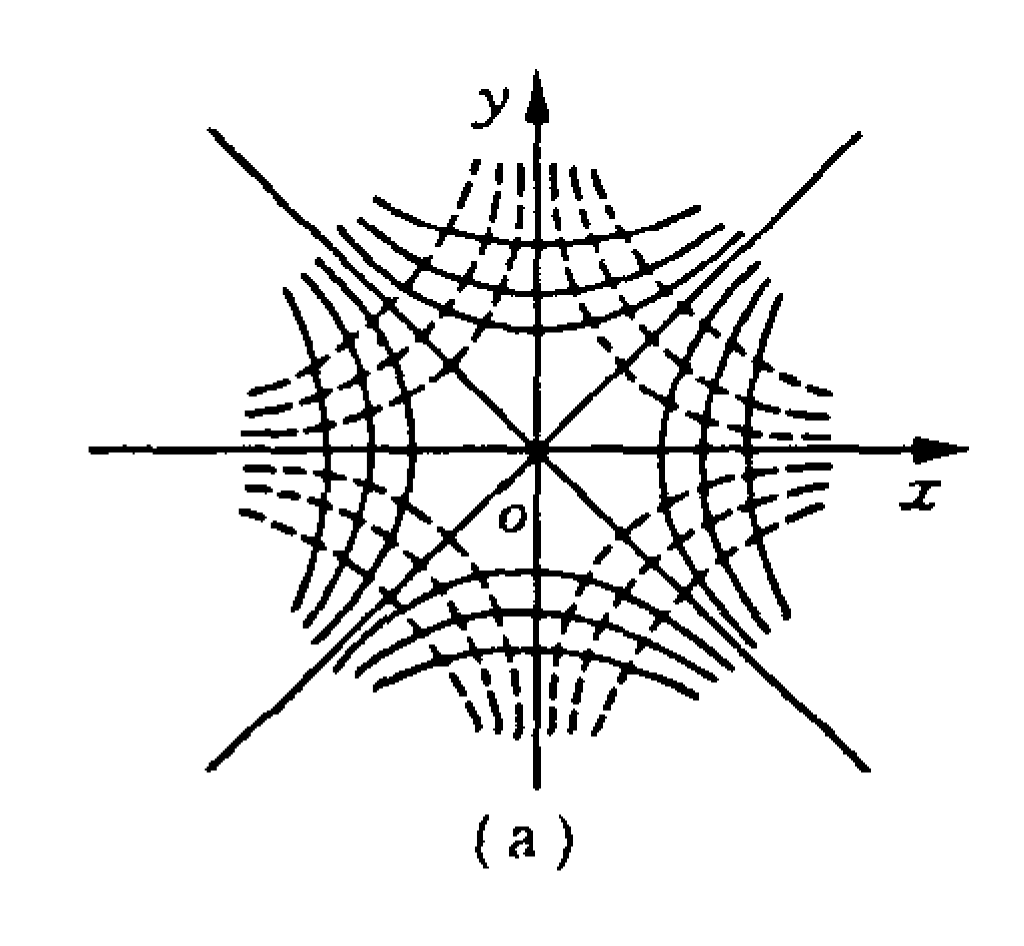


图 1.20

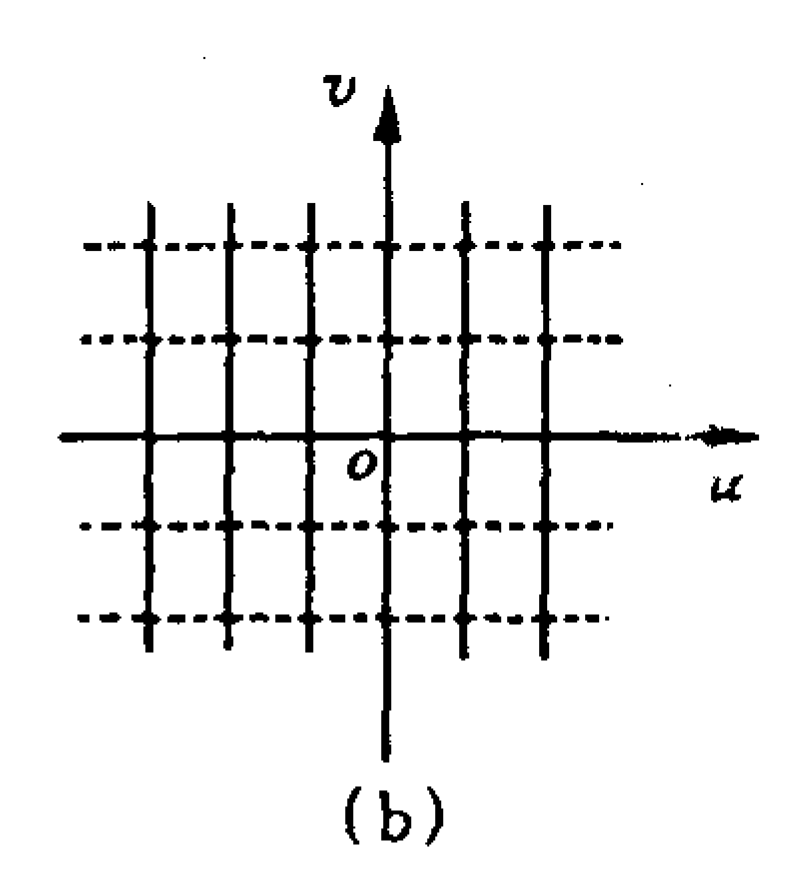
(2) 记 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},0<r<2$ 映为 w 平面上扇形域(见图 1.20b)，即

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < 2.$$

(3) 将 $x^2 - y^2 = C_1, 2xy = C_2$ 映为 w 平面上两族平行直线 $u = C_1, v = C_2$(见图 1.21).



(a)



(b)

图 1.21

(4) 将直线 $x = \lambda$ 映为 $u = \lambda^2 - y^2$, $v = 2\lambda y$,化为 $v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u)$,是以原点为焦点、张口向左的抛物线;将直线 $y = \mu$ 映为 $u = x^2 - \mu^2, v = 2\mu x$,化为 $v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u)$,是以原点为焦点、张口向右的抛物线,如图 1.22 所示.

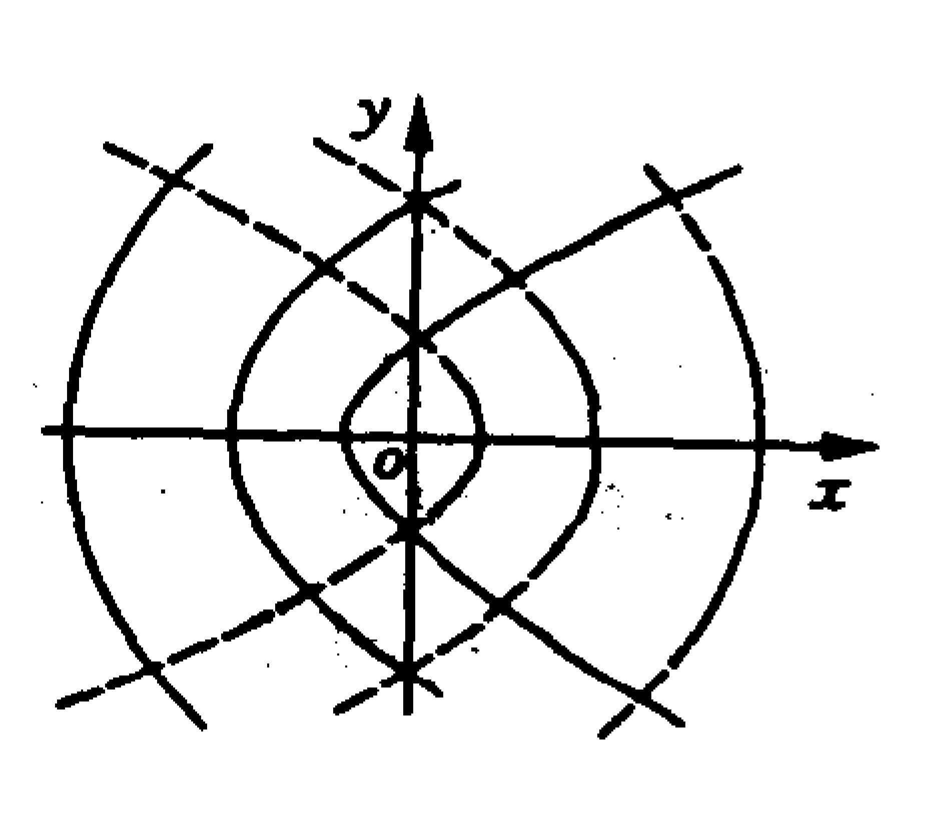


图 1.22

例 3 在映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 下,下列曲线映为 w 平面上的什么图形?

(1) $x^2 + y^2 = 4$;

(2) $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

解 (1) $u + \mathrm{i}v = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$,得

$$u = \frac{x}{x^2+y^2},\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

所以,$x^2 + y^2 = 4$ 映为 w 平面上 $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$,是 w 平面上以原点为圆心、半径为$\dfrac{1}{2}$ 的圆.

(2) 换一种方法. 因为 $w = 1/z, z = 1/w, \bar{z} = 1/\overline{w}$, 而 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, 即 $z\bar{z} = z - \bar{z} = 0$, 代入得

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}} = 0$$

或 $$w + \overline{w} = 1 \Rightarrow u = 1/2.$$

是 w 平面上直线 $u = 1/2$.

例 4 设 G 是由不等式 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, |z| < 1$ 所确定的扇形域, 证明: $w = z^2$ 在 G 内为单叶函数.

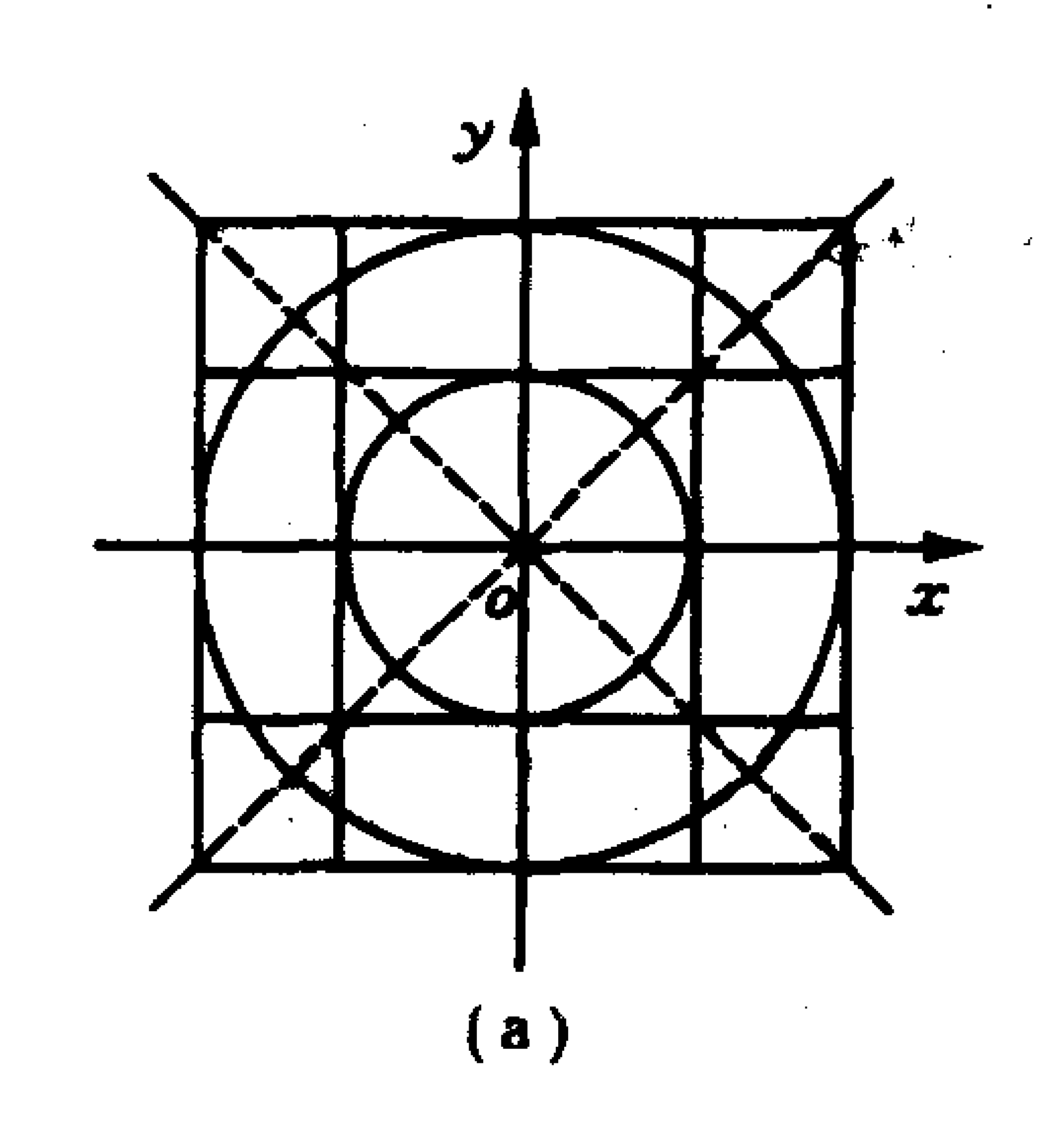
证 设 $z_1, z_2 \in G$, 且 $z_1 \neq z_2$, 而 $w_1 = w_2$, 则有 $z_1^2 = z_2^2$, 即 $(z_2 - z_1)(z_2 + z_1) = 0$, 所以 $z_2 = - z_1$.

设 $z_1 = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 于是

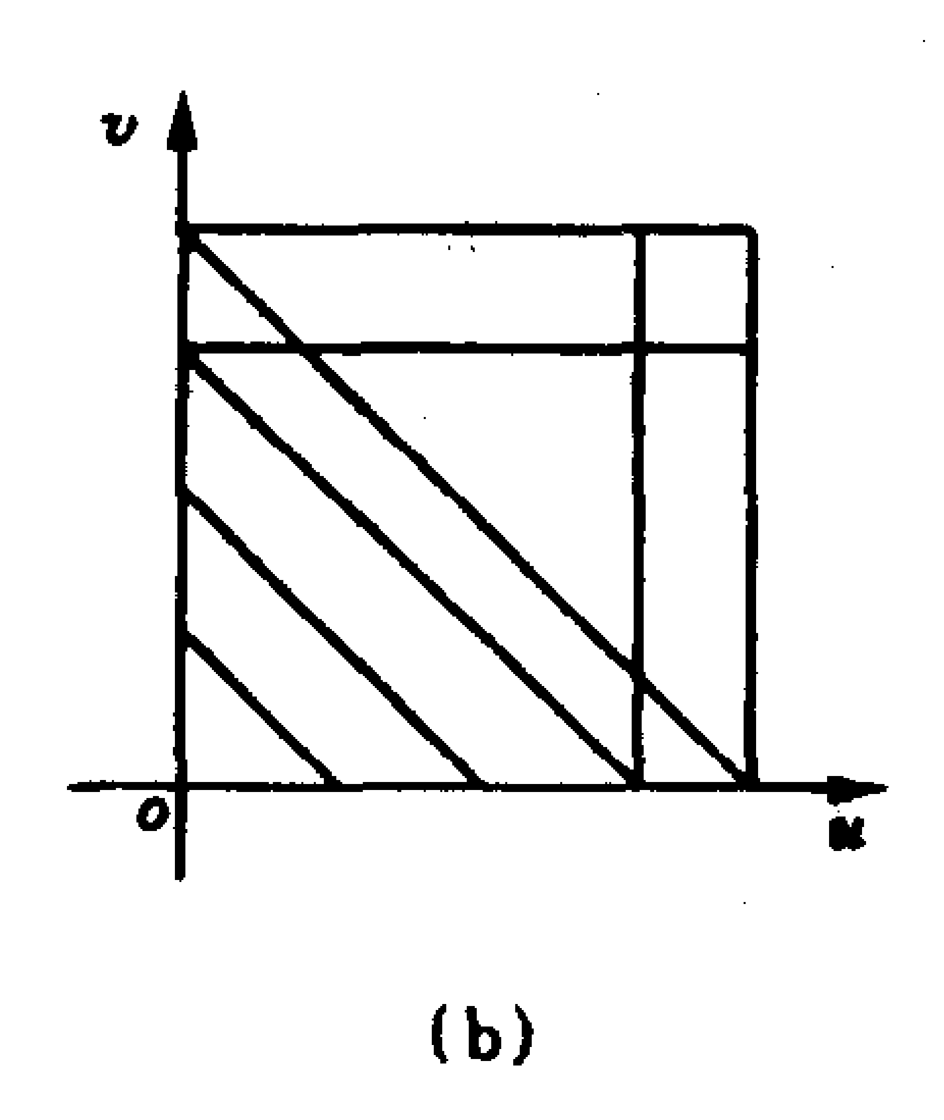
$$z_2 = - z_1 = r[\cos(\theta + \pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \pi)] \Rightarrow \arg z_2 = \theta + \pi.$$

因为 $z_1 \in G, 0 < \arg z_1 < \dfrac{\pi}{4}$, 得 $\pi < \arg z_2 < \dfrac{5}{4}\pi$, 这与 $z_2 \in G$ 相矛盾, 所以 $w_1 \neq w_2, w = z^2$ 为 G 内的单叶函数.

例 5 设 $w = x^2 + \mathrm{i}y^2, z = x + \mathrm{i}y$, 求直线 $x = a, y = a$ 及 $x^2 + y^2 = a^2$ 的像.



(a)



(b)

图 1.23

解 设 $w = u + \mathrm{i}v$, 则 $u = x^2, v = y^2$.

对直线 $x = a$, 得 $u = a^2 (v > 0)$, 是 w 平面上半直线.

对直线 $y=a$，得 $v=a^2(u>0)$，是 w 平面上半直线.

对 $x^2+y^2=a^2$，得 $u+v=a^2(u>0,v>0)$，是 w 平面上线段(见图 1.23).

对直线 $y=ax$，得 $v=a^2u\ (u>0)$，是 w 平面上半直线.

例 6 将函数 $f(z)=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ 写成关于 z 的解析式.

解 常用以下三种方法：

(1) 共轭法. 将 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ 代入得

$$f(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\frac{1}{z\bar{z}}\right)+\mathrm{i}\,\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)=z+\frac{1}{z}.$$

(2) 拼凑法. 凑成 $x+\mathrm{i}y(=z)$ 的因式，则

$$f(z)=(x+\mathrm{i}y)+\frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathrm{i}y)=z+\frac{1}{z\bar{z}}\cdot\bar{z}=z+\frac{1}{z}.$$

(3) 设零法. 令 $y=0$，求 $f(x)$ 再得 $f(z)$.

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x+\frac{1}{x}\Rightarrow f(z)=z+\frac{1}{z}.$$

例 7 设复数 z 从 $z=1$ 开始，沿圆周 $|z|=1$ 逆时针方向旋转了 $\pi/3$，讨论 $w=3z,w=1/z,w=z^2,w=(z-2)^2$ 得到的曲线各是什么.

解 (1) $w=3z$，则 $|w|=3,0\leqslant \arg w=\arg z\leqslant \pi/3$. 曲线是以原点为圆心、3 为半径的圆周上辐角从 0 到 $\pi/3$ 的一段圆弧.

(2) $w=1/z$，则 $|w|=1,\arg w=-\arg z$. 曲线是单位圆周上辐角从 0 到 $-\pi/3$ 的一段圆弧.

(3) $w=z^2$，则 $|w|=1,\arg w=2\arg z$. 曲线是单位圆周上辐角从 0 到 $2\pi/3$ 的一段圆弧.

(4) $w=(z-2)^2$，则 $|w|=|z-2|^2=(z-2)(\bar{z}-2)=x^2+y^2-4x+4=5-4\cos\theta$. 当 $\theta=0$ 时，$|w|=1$；当 $\theta=\pi/3$ 时，$w=3$. 曲线是实轴上从 1 到 3 的直线段.

例 8 设 $z = 1 + \mathrm{i}, w = z^2 - 3z - 4$. 写出 w 的三角表示式.

解 $w = (1 + \mathrm{i})^2 - 3(1 + \mathrm{i}) - 4 = -1 - \mathrm{i}$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin \frac{5}{4}\pi\right).$$

二、复变函数的极限

因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 的存在要求在 z 以任何方式趋向 z_0 时，极限存在且惟一，因此，讨论极限时要考虑 $z \to z_0$ 的方式. 同时，又可从两个实二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限来讨论.

例 9 讨论函数 $w = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$，当 $z = x + \mathrm{i}y$ 在从原点出发的射线上趋向无穷时的极限.

解 当 $x = 0$ 时，$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$. 而 $\lim\limits_{y\to+\infty} \cos y$ 和 $\lim\limits_{y\to+\infty} \sin y$ 都不存在，所以 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to+\infty}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to-\infty}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ 都不存在.

当 $x \neq 0$ 时，$|\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$，$\lim\limits_{\substack{x<0\\ y\to+\infty}} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 0$，而

$$\lim_{\substack{x>0\\ y\to+\infty}} |\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \lim_{\substack{x>0\\ y\to+\infty}} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x>0\\ y\to+\infty}} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = +\infty.$$

例 10 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$.

解 (1) 讨论 $|z|$ 为不同值的情形：

若 $|z| < 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|z^n| = \lim\limits_{n\to\infty}|z|^n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

若 $|z| > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|z^n| = \lim\limits_{n\to\infty}|z|^n = \infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$.

若 $|z| = 1$ 而 $z \neq 1$，可取 $\varepsilon_0 < |z - 1|$，则对任意的 N，取 $\rho = 1$，有 $|z^{N+1} - z^N| = |z^N||z - 1| = |z - 1| > \varepsilon_0$，由柯西审敛原理，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$ 不存在.

若 $z = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 1$.

(2) 因为

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1 - z^n}{1 - z}, & z \neq 1, \\ n, & z = 1, \end{cases}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=\begin{cases}\dfrac{1}{1-z}, & |z|<1,\\ \infty, & |z|>1 \text{ 或 } z=1,\\ \text{不存在}, & |z|=1, z\neq 1.\end{cases}$$

以上结果可由题(1) 推出.

例 11 求序列 $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\right\}$ 的极限.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}$$
$$=0\ (\text{有界量乘无穷小}).$$

例 12 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=z_0.$$

证 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$, $k=1,2,\cdots$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,则只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=y_0$$

即可. 两个等式的证明是相同的,我们只证第一式.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,所以,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$x_0-\varepsilon<x_n<x_0+\varepsilon.$$

故有 $$(n-N)(x_0-\varepsilon)<x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n<(n-N)(x_0+\varepsilon)$$

或 $$(n-N)(x_0-\varepsilon)<(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)<(n-N)(x_0+\varepsilon),$$

于是 $$\left(1-\frac{N}{n}\right)(x_0-\varepsilon)<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

$$< \left(1-\frac{N}{n}\right)(x_0+\varepsilon).$$

从而，当 $n\to\infty$ 时，有

$$x_0-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant x_0+\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0.$$

例 13 试讨论 $f(z)=\dfrac{z}{\bar z}+\dfrac{\bar z}{z}$ 的极限.

解 设 $z=re^{i\theta}$，则 $\bar z=re^{-i\theta}$，于是

$$f(z)=\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}+\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}=\cos 2\theta.$$

因为 $\lim\limits_{\substack{|z|\to 0\\ \arg z=0}}f(z)=1$，$\lim\limits_{\substack{|z|\to 0\\ \arg z=\pi/4}}f(z)=0$. 所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 点无极限.

讨论 $\cos 2\theta$ 作为 θ 的函数，是关于 θ 连续的，在实函数中应该有极限. 但作为复变量 z 的函数，$\theta=\arg z$，$f(z)=\cos(2\arg z)$. 当 $z\to 0$ 时，z 的辐角可以任取不同的值，上面取了两个不同的值，结果 $f(z)$ 趋向于不同的值. 于是我们得知，$f(z)$ 在 $z=0$ 无极限.

例 14 证明：函数 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar z}-\dfrac{\bar z}{z}\right)$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证法 1 同例 13，令 $z=re^{i\theta}$，$\bar z=re^{-i\theta}$，则

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}-\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right)=\sin 2\theta.$$

因为 $\lim\limits_{\substack{|z|\to 0\\ \arg z=0}}f(z)=0$，$\lim\limits_{\substack{|z|\to 0\\ \arg z=\pi/4}}f(z)=1$. 所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 无极限.

证法 2 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\dfrac{z^2-\bar z^2}{z\bar z}=\dfrac{2\mathrm{Re}(z)\cdot 2i\mathrm{Im}(z)}{2i|z|^2}$

$$=\frac{2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

令 z 沿直线 $y=kx$ 趋向于零，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

显然，当 k 取不同值时，$u(x,y)$ 趋向于不同的值. 所以，$\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在.

例 15 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}$； (2) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1+z^2}$；

(3) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}$； (4) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$.

解 (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\dfrac{x}{x+\mathrm{i}y}$，有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x}{x+\mathrm{i}kx}=\frac{1}{1+\mathrm{i}k},$$

显然，当 k 取不同值时，$f(z)$ 趋向于不同的值.

(2) 令 $z=\dfrac{1}{t}$，则 $t\to\infty$ 时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+z^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1+t^2}=0.$$

(3) 因为 $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}=\dfrac{1}{z(z+\mathrm{i})}$，所以

$$\lim_{z\to i}\frac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z(z+\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}.$$

(4) 因为 $\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\dfrac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{\bar{z}+2}{z+1}$，所以

$$\lim_{z\to 1}\frac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\bar{z}+2}{z+1}=\frac{3}{2}.$$

三、复变函数的连续性

讨论复变函数的连续性，重点还是考察在不同方式下，$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 是否等于 $f(z_0)$. 同样，我们也可以讨论两个实二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的连续性来确定 $f(z)$ 的连续性.

例 16 讨论函数 $\mathrm{Arg}z$ 的连续性.

解 由 $\arg z$ 的确定方式知，当 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 不是原点也不是

负实轴上点时，与 z_0 足够接近的点也不是原点与负实轴上点. 这时，有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), \\ \arctan(y/x) \pm \pi. \end{cases}$$

因为 $x_0 \neq 0$，所以 $\arctan(y_0/x_0)$ 有意义，故

$$\lim_{z \to z_0} (\arg z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \begin{cases} \arctan(y/x) \\ \arctan(y/x) \pm \pi \end{cases} = \begin{cases} \arctan(y_0/x_0), \\ \arctan(y_0/x_0) \pm \pi. \end{cases}$$

即 $\lim\limits_{z \to z_0} (\arg z) = \arg z_0$. 故 $\arg z$ 在除去原点和负实轴的复平面上连续.

当 z_0 为正、负虚轴上点 $z_0 = \mathrm{i} y_0 (z_0 \neq 0)$ 时，有

$$\lim_{z \to z_0} (\arg z) = \pm \frac{\pi}{2} = \arg z_0.$$

所以，$\arg z$ 在虚轴(除去原点)上也连续.

当 z_0 为负实轴上点 $z_0 = x_0 (x_0 < 0)$ 时，有

$$\lim_{z \to z_0} (\arg z) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^+}} [\arctan(y/x + \pi)] = \pi, \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^-}} [\arctan(y/x - \pi)] = -\pi. \end{cases}$$

所以，$\lim\limits_{z \to z_0} (\arg z)$ 不存在，函数 $\arg z$ 在负实轴上不连续.

在原点，由于辐角不确定，$\arg z$ 无定义，所以不连续.

综上所述可知，$\arg z$ 在除原点和负实轴外的全平面都连续.

例 17 设函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 连续，且 $f(z_0) \neq 0$，证明：可以找到 z_0 的一个邻域，函数 $f(z_0)$ 在此邻域内取值不为零.

证 由连续性和 $f(z_0) \neq 0$，可取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2} |f(z_0)| > 0$，则存在 $\delta > 0$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|,$$

故 $$|f(z)|-\frac{1}{2}|f(z_0)|<|f(z_0)|,$$

即 $$|f(z)|-|f(z_0)|-\frac{1}{2}|f(z_0)|=\frac{1}{2}|f(z_0)|>0.$$

例 18 证明：函数 $w=f(z)=ax+b$ 在全平面连续，其中 a，b 为复常数.

证 若 $a=0$，则 $f(x)=b$，显然在全平面连续.

若 $a\neq 0$，则对任意点 z_0，有

$$|f(z)-f(z_0)|=|a||z-z_0|.$$

因此，对任给 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$，则当 $|z-z_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(z)-f(z_0)|<|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon,$$

即 $f(z)$ 在 z_0 连续.

例 19 讨论下列函数的连续性：

(1) $w=|z|$； (2) $w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$；

(3) $w=\dfrac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}$.

解 (1) 设 z_0 为复平面上任意点，因为

$$\lim_{z\to z_0}|z|=|z_0|,$$

所以，函数 $w=|z|$ 在复平面上处处连续.

(2) 设 z_0 为复平面上任意点，因为

$$\lim_{z\to z_0}(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0z_0^n+a_1z_0^{n-1}+\cdots+a_n,$$

所以，$w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在全平面连续.

(3) 在复平面上任取一 z_0，使 $b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m\neq 0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

所以，分式有理函数 $\dfrac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}$ 在除使分

母为零的点外的全平面连续.

例 20 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0;\end{cases}$

(2) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$

解 (1) 当 z 沿实轴趋向于零时, $z=x$, 有

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{x\to 0}x=0;$$

当 z 沿某一直线趋向于零时, $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$, $y=x\tan\theta$, 所以

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\neq 0.$$

而当 θ 不同时, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 趋向于不同的值. 所以, $f(z)$ 在 $z=0$ 不连续.

(2) 令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 当 $z\neq 0$ 时, 有

$$f(z)=\frac{x^3y}{x^4+y^2}=\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta},$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|z-0|=|re^{\mathrm{i}\theta}|=r<\varepsilon$ 时, 若 $|\theta|=\dfrac{\pi}{2}$, 则 $|f(z)|=0<\varepsilon$; 若 $|\theta|\neq\dfrac{\pi}{2}$, 而 $|\tan\theta|<\varepsilon$, 则

$$|f(z)|<\left|\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right|\leqslant\frac{r^2}{|\tan\theta|}\leqslant\varepsilon.$$

所以, 对任给的 ε, 存在 $\delta=\varepsilon$, 使得当 $|z-0|<\delta$ 时, 有

$$|f(z)-f(0)|=|f(z)|<\varepsilon.$$

故 $f(z)$ 在 $z=0$ 连续.

例 21 证明: 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内连续, 但不一致连续.

证 因为 $\varphi(z)=1-z$ 在全平面连续，在 $|z|<1$ 内，$\varphi(z)\neq 0$，所以，由有理分式函数的连续性，$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内连续.

对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，无论 δ 多么小，总可选取 $z_1=1-\dfrac{1}{n}$ 与 $z_2=1-\dfrac{2}{n}$，使 $|z_1-z_2|=\dfrac{1}{n}<\delta\left(当\ n>\dfrac{1}{\delta}\right)$，但

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\frac{n}{2}>\varepsilon_0,$$

所以，$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内不一致连续.

例 22 证明：在条件 $a_0>a_1>\cdots>a_n>0$ 下，

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 上无根.

证 $z=1$ 显然不是 $P_n(z)$ 的根，一般 $z=x>0$ 也不是. 令

$$\begin{aligned}P_n(z)&=\frac{(1-z)(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n)}{1-z}\\&=\frac{a_0+(a_1-a_0)z+\cdots+(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1}}{1-z}.\end{aligned}$$

若 $P_n(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上有根，则由上式，有

$$\begin{aligned}c_0=&\ z(c_0-c_1)+z^2(c_1-c_2)+\cdots\\&+z^n(c_{n-1}-c_n)+c_nz^{n+1}.\end{aligned}$$

由于 $c_0-c_1,c_1-c_2,\cdots,c_{n-1}-c_n,c_n$ 都是正数，因此，当 $z\neq x\geqslant 0$ 时，$z(c_0-c_1),z^2(c_1-c_2),\cdots,z^n(c_{n-1}-c_n),c_nz^{n+1}$ 的辐角不可能全部相等. 因此，由上面的不等式可得不等式

$$\begin{aligned}c_0&<|z|(c_0-c_1)+|z|^2(c_1-c_2)+\cdots\\&\quad+|z|^n(c_{n-1}-c_n)+|z|^{n+1}c_n\\&<(c_0-c_1)+(c_1-c_2)+\cdots\\&\quad+(c_{n-1}-c_n)+c_n=c_0.\end{aligned}$$

推出矛盾，所以 $P_n(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上没有根.

第二章　解析函数

本章重点讨论复变函数的主要研究对象 —— 解析函数概念及其判别方法. 并研究初等函数的解析性及解析函数在平面场中的应用.

第一节　函数解析的充要条件

主要内容

一、解析函数概念

1. 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内有定义, $z_0 \in D$, 点 $z_0 + \Delta z \in D$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导, 极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在 D 内处处可导, 就称 $f(z)$ 在 D 内可导.

2. 可导与连续

在 z_0 内可导的函数 $f(z)$ 在 z_0 必然连续.

在 z_0 连续的函数 $f(z)$ 在 z_0 不一定可导, 如 $f(z) = x + 2\mathrm{i}y$ 在点 z 连续却不可导.

3. 复变函数有同实变函数类同的求导法则

(1) $(C)' = 0$, 其中 C 为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为正整数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{1}{g^2(z)}[f'(z)g(z) - f(z)g'(z)],\ g(z) \neq 0$.

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$,其中 $w = g(z)$.

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$,其中 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数,且 $\varphi'(w) = 0$.

4. 若函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导,则函数增量

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z.$$

将 Δw 的线性部分 $f'(z_0)\Delta w$ 称为函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的微分,记作 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\mathrm{d}z$. 如果函数在 z_0 的微分存在,就称函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可微. 函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导与可微等价. 函数 $f(z)$ 在 D 内处处可微,称 $f(z)$ 在 D 内可微.

5. 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导,称 $f(z)$ 在 z_0 解析. 如果 $f(z)$ 在 D 内每一点解析,则称 $f(z)$ 在 D 内解析,也称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数).

如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析,则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

6. 关于解析函数的定理

在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

若函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析,函数 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析,如果对 D 内的每一个点 z,函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G,则复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.

二、函数解析的充要条件

定理 1 设函数 $f(u) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内,则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可导的充要条件是:$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微,且满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的导数

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

定理 2　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微，且满足柯西 - 黎曼方程.

疑 难 解 析

1. 函数 $w=f(z)$ 在一点 z_0 可导与解析有什么不同？在一个区域 D 呢？

答　函数 $w=f(z)$ 在一点 z_0 解析比可导的要求要高得多. $f(z)$ 在 z_0 解析，要求 $f(z)$ 不仅在 z_0 可导，还要求在 z_0 的邻域内也可导. 例如，函数 $f(z)=z\mathrm{Re}(z)$ 在 $z=0$ 可导(导数等于零)，但在除去原点的全平面都不可导(因为 $\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{z}{\Delta z}[\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)]+\mathrm{Re}(z+\Delta z)$ 在 $\Delta z\to 0$ 时，没有确定的极限)，所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 不解析.

在一个区域 D 内，因为所有点都是内点，所以 $w=f(z)$ 在 D 内可导与在 D 内解析是一致的.

2. 复变函数 $w=f(z)$ 的导数定义与实一元函数 $y=f(x)$ 的导数定义在要求上有什么不同？

答　两者在定义的形式与求导公式、求导法则上都完全相同. 但是由于极限的要求不同，在复变函数 $w=f(z)$ 的导数定义

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

中，$\Delta z\to 0$ 的方式是任意的，而实一元函数 $y=f(x)$ 定义中，Δx

$\to 0$ 的方式要简单得多. 所以,我们说复变函数在一点可导的条件更为严格,从而复变函数的导数具有不少特殊的性质.

3. 判别函数可导与解析有哪些方法?

答　目前为止,可用以下三种方法.

(1) 由定义判别.

若 $w = f(z)$ 在 z_0 可导,且在 z_0 邻域内可导,则 $f(z)$ 在 z_0 解析. $f(z)$ 在 z_0 导数存在,则在 z_0 可导;在 z_0 导数不存在,则 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.

(2) 用定理 1 判别 $f(z)$ 在点 z 是否可导.

考察两个实二元函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 是否可微,并验证是否满足柯西 - 黎曼条件(简称 C-R 条件).

(3) 用定理 2 判别 $f(z)$ 在 D 内是否解析.

考察两个实二元函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内是否可微,并验证是否满足 C-R 条件.

常常有人忽略对 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 可微的考察而导致错误. 例如 $f(z) = \sqrt{|xy|}$,在两个坐标轴上函数都等于零,所以在 $z = 0$ 处,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim \frac{0}{\Delta x} = 0,\text{其它类似可求}\right)$,

即 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 满足 C-R 条件,但 $f(z)$ 在 $z = 0$ 不可微,所以在点 $(0,0)$,$f(z)$ 不解析(因为 $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + \mathrm{i}y}$,取 $x = \alpha\gamma, y = \beta\gamma$,则当 $\gamma \to 0$ 时 $\Delta w / \Delta z \to \sqrt{\alpha\beta}/(\alpha + \mathrm{i}\beta)$ 随 α, β 的取值而改变,不惟一).

4. 复变函数的连续、可导(可微)与解析之间有什么关系?

答　由于 $w = f(z)$ 在一点可导与解析不同,所以,对定义在 D 上的函数 $w = f(z)$ 及点 $z_0 \in D$,$f(z)$ 的连续、可导与解析可用

图 2.1 表示.

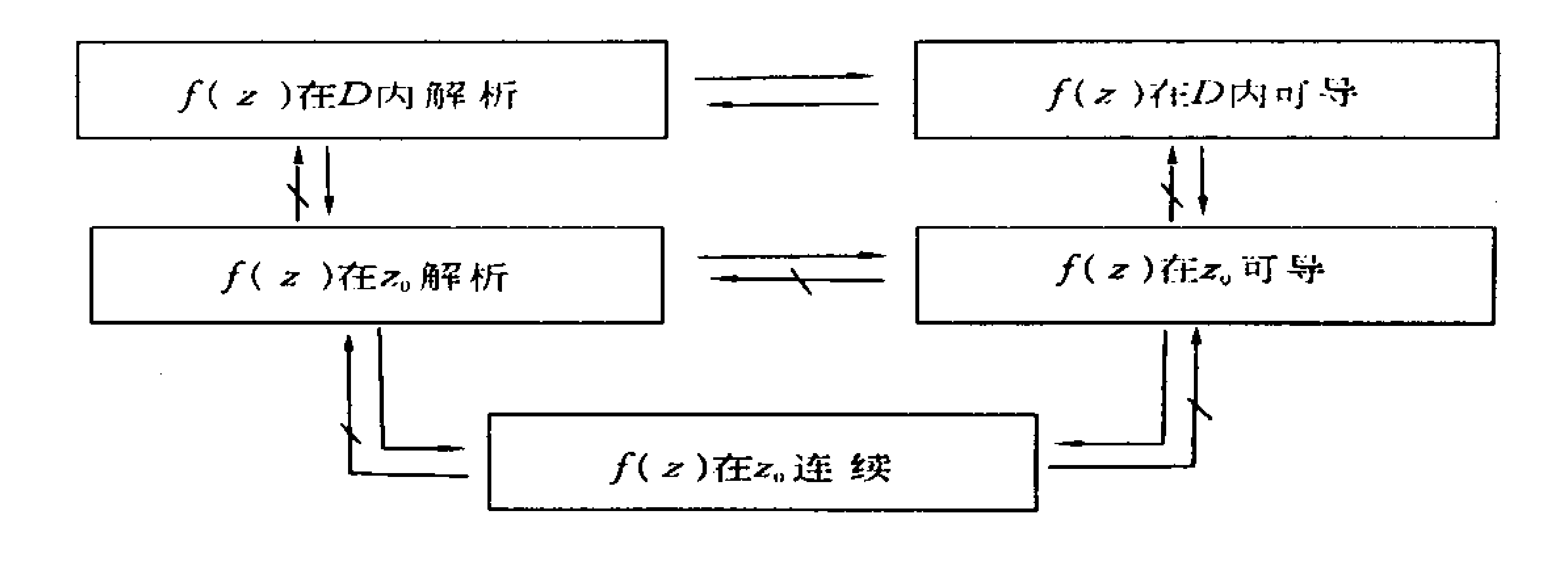


图 2.1

方法、技巧与典型例题分析

一、复变函数的导数与微分

判别一个函数 $f(z)$ 在一点是否可导可以利用定义,也可以利用定理1. 利用定义时要考虑 $\Delta z \to 0$ 是以任意方式出现的,利用定理1考察 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 是否可导也要考虑 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 是否以任意方式出现的,这是复变函数导数与实一元函数导数的重要区别. 对于分段函数情形,同实一元函数一样,要用定义来判别. 至于导数计算,我们只要正确使用求导法则就可以了.

例 1 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析,且 $f'(z) \neq 0, z \in D$, D^* 为 $w = f(z)$ 的值域. 设 $z = \varphi(w)$ 是 $w = f(z)$ 的单值反函数,且在 D^* 上连续. 证明:$z = \varphi(w)$ 在 D^* 上解析,且

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'[\varphi(w)]}.$$

证 对任一 $w_0 \in D^*$,因为 $z = \varphi(w)$ 在 $w = w_0$ 连续,所以当 $w \to w_0$ 时,$z = \varphi(w) \to z_0 = \varphi(w_0)$. 于是

$$\lim_{w \to w_0} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \to w_0}\left[1 \Big/ \frac{w - w_0}{\varphi(w) - \varphi(w_0)}\right] = \lim_{z \to z_0}\left[1 \Big/ \frac{w - w_0}{z - z_0}\right]$$

$$= \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'[\varphi(w_0)]}.$$

由 w_0 的任意性，$z=\varphi(w)$ 在 D^* 上处处可导，从而知 $z=\varphi(w)$ 在 D^* 上解析.

例 2 证明：函数 $f(z)=z\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z=0$ 处有导数.

证 在 $z=0$ 处，有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\mathrm{Re}(z)}{z}=0,$$

在 $z=z_0\neq 0$ 处，令 $z=x+\mathrm{i}y, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}&=\lim_{z\to z_0}\frac{z\mathrm{Re}(z)-z_0\mathrm{Re}(z_0)}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\mathrm{Re}(z)}{z-z_0}+\frac{z_0[\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)]}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\left[x+z_0\frac{x-x_0}{z-z_0}\right].\end{aligned}$$

令 $x=x_0, y\to y_0$，得 $\lim\limits_{\substack{x=x_0\\y\to y_0}}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=x_0$；

令 $y=y_0, x\to x_0$，得 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y=y_0}}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=2x_0+\mathrm{i}y_0$.

显然，当 $z_0\neq 0$ 时，两极限值不相等. 说明 $f(z)=z\mathrm{Re}(z)$ 当 $z\neq 0$ 时不可导.

例 3 讨论下列函数的可导性：

(1) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$；　(2) $f(z)=|z|^2$；　(3) $f(z)=\bar{z}$.

解 讨论函数的可导性可以用定义，也可以用 C-R 条件. 一般来说，用定义比较麻烦，用 C-R 条件比较简单.

(1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $f(z)=\mathrm{Im}(z)=y$，即 $u(x,y)=y$，$v(x,y)=0$ 都在点 (x,y) 可微. 又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

所以在复平面上 C-R 条件处处不成立，所以 $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ 在复平面上处处不可导.

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $f(z)=|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2$，即

$u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0$，都在点(x,y)可微. 又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

当$z=0$时，C-R条件成立；当$z\neq 0$时，C-R条件不成立. 所以，除$z=0$外，$f(z)=|z|^2$在复平面上不可导.

(3) 设$z=x+\mathrm{i}y$，则$f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，即$u(x,y)=x$，$v(x,y)=-y$，在点$(x,y)$均可微. 但

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

所以在复平面上C-R条件处处不成立. 于是，$f(z)=\bar{z}$在复平面上处处不可导.

例 4 证明：$f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}(z^2)|}$的实部和虚部在点$(0,0)$满足C-R条件，但$f(z)$在$z=0$不可微.

证 设$z=x+\mathrm{i}y$，则$f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}(z^2)|}=\sqrt{|2xy|}$，即

$$u(x,y)=\sqrt{|2xy|},\ v=0.$$

在点$(0,0)$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

同时，由$v=0$得$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 所以，在点$(0,0)$，$f(z)$满足C-R条件，但在点$(0,0)$，有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

$$\lim_{\Delta x=\Delta y\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{2|\Delta x|^2}}{\Delta x(1+\mathrm{i})}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=0\neq\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}.$$

从而，知$f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}(z^2)|}$在$z=0$不可微.

例 5 证明：$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3(1+\mathrm{i})-y^3(1-\mathrm{i})}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 满足 C-R 条件，但不可导.

证 考察极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z}[f(z)-f(0)]$.

当 z 沿虚轴趋向于零时，$z=\mathrm{i}y$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}y}[f(\mathrm{i}y)-f(0)]=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}y}\frac{-y^3(1-\mathrm{i})}{y^2}=1+\mathrm{i}.$$

当 z 沿实轴趋向于零时，$z=x$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[f(x)-f(0)]=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+\mathrm{i})}{x^3}=(1+\mathrm{i}).$$

它们分别为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，所以满足 C-R 条件.

但当 z 沿 $y=x$ 趋向于零时，有

$$\lim_{x=y\to 0}\frac{f(x+\mathrm{i}x)-f(0,0)}{x+\mathrm{i}x}=\lim_{x=y\to 0}\frac{x^3(1+\mathrm{i})-x^3(1-\mathrm{i})}{2x^3(1+\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},$$

所以，$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 不存在，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

例 6 下列函数在何处可导？求出其导数.

(1) $(z-1)^n$； (2) $\bar{z}z^2$； (3) $(z^2-1)^2(z^2+1)^2$；

(4) $(az+b)/(cz+d)$，c,d 中至少有一个不为零；

(5) $\dfrac{z-2}{(z+1)(z^2+1)}$； (6) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

解 (1) 对任意的 z，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1})=nz_0^{n-1},$$

即 $(z^n)'=nz^{n-1}$. 由复合函数求导法则，得

$$[(z-1)^n]'=n(z-1)^{n-1}.$$

(2) 由于 z^2 在全平面处处可导，$\bar{z}$ 在全平面处处不可导. 所以

$\bar{z}z^2$ 在 $z \neq 0$ 处处不可导. 在 $z = 0$，由定义可得

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}z^2 - 0}{z} = \lim_{z\to 0} z\bar{z} = 0.$$

知 $\bar{z}z^2$ 除在 $z = 0$ 可导、$f'(0) = 0$ 外，在复平面上不可导.

(3) 用乘积及复合函数的求导法则，有

$$\begin{aligned}
&[(z^2 - 1)^2(z^2 + 1)^2]' \\
&= [(z^2 - 1)^2]'(z^2 + 1)^2 + (z^2 - 1)^2[(z^2 + 1)^2]' \\
&= 4z(z^2 - 1)(z^2 + 1)^2 + 4z(z^2 - 1)^2(z^2 + 1) \\
&= 8z^3(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 8z^3(z^4 - 1).
\end{aligned}$$

(4) 若 $c = 0$，则 $\left(\dfrac{az + b}{cz + d}\right)' = \dfrac{1}{d}(az + b)' = \dfrac{a}{d}$，在全平面都成立.

若 $c \neq 0$，且 $z \neq -d/c$，则

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)' = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

(5) 用商和复合函数求导法则，有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z - 2}{(z + 1)(z^2 + 1)}\right)' \\
&= \frac{(z - 2)'(z + 1)(z^2 + 1) - (z - 2)[(z + 1)(z^2 + 1)]'}{(z + 1)^2(z^2 + 1)^2} \\
&= \frac{-2z^3 + 5z^2 + 4z + 3}{(z + 1)^2(z^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

在 $z \neq \pm \mathrm{i}, z \neq -1$ 处都有导数.

(6) 因为

$$f(z) = \frac{(x - \mathrm{i}y) + \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y)}{x^2 + y^2} = \frac{(1 + \mathrm{i})\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1 + \mathrm{i}}{z},$$

所以，除 $z = 0$ 外，$f(z)$ 在复平面上处处可导，且

$$f'(z) = [(1 + \mathrm{i})/z]' = -(1 + \mathrm{i})/z^2 \quad (z \neq 0).$$

例 7 求下列函数的奇点：

(1) $\dfrac{z + 1}{z(z^2 + 1)}$；　(2) $\dfrac{z - 2}{(z + 2)^3(z^2 + 1)}$.

解　(1) 由 $z(z^2+1)=0$，得 $z=0,\pm\mathrm{i}$. 所以 $z=0,\pm\mathrm{i}$ 为奇点.

(2) 由 $(z+2)^3(z^2+1)=0$，得 $z=-2,\pm\mathrm{i}$. 所以 $z=2,\pm\mathrm{i}$ 为奇点.

例 8　设函数 $f(z)$ 在 z_0 满足：(1) u,v 在 z_0 可微；(2) $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(|\Delta w|/|\Delta z|)$ 存在，则 $f(z)$ 和 $\overline{f(z)}$ 中一定有一个在 z_0 可导.

证　因为 u,v 在 z_0 处可微，所以在 z_0 处存在任意方向的方向导数 $\partial u/\partial l,\partial v/\partial l$，且

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{|\Delta z|}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{|\Delta z|}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{|\Delta z|}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^2}.$$

令 $y=0$，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$；

令 $x=0$，则 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$；

令 $y=x$，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$.

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right].$$

令 $X=\dfrac{\partial u}{\partial x},Y=\dfrac{\partial u}{\partial y},A=\dfrac{\partial v}{\partial x},B=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，则上式变为

$$X^2+A^2=Y^2+B^2=\frac{1}{2}[(X+Y)^2+(A+B)^2].$$

解得 $XY=-AB$，由

$$\begin{cases}X^2-Y^2=B^2-A^2,\\ XY=-AB,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\pm B,\\ Y=\mp A,\end{cases}$$

即$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}$.

当前一组等式成立时，$f(z)$ 在 z_0 可导；

当后一组等式成立时，$\overline{f(z)}$ 在 z_0 可导.

例 9 设实函数$u(x,y)$有偏导数，且$u(x,y)$可表示为$z=x+\mathrm{i}y$和$\bar{z}$的函数，即$u(x,y)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)$. 设$z$和$\bar{z}$是独立的，证明：

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

证 由复合函数求导法则，可得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

利用了$\frac{\partial x}{\partial z}=1\Big/\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=1\Big/\frac{\partial \bar{z}}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}=1\Big/\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=1\Big/\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$，所以等式得证.

例 10 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$u,v$都有偏导数. 证明：对$f(z)$，C-R 条件可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=0.$$

证 利用例 9 结果，有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

同理
$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

若$f(z)$解析，则C-R条件成立，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入即得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

可见与 $f(z)$ 的 C-R 条件等价.

例 11 讨论:若 $f(z)$ 可导,何时有

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)?$$

其中 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$.

解 因为 $f(z)$ 可导,则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 惟一确定.若取点 z 和 $z+\Delta z$ 位于由原点出发、辐角为 θ 的射线上,即 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$,$z+\Delta z=(r+\Delta r)e^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta re^{\mathrm{i}\theta}}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta r}+\mathrm{i}\frac{\Delta r}{\Delta r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta).\end{aligned}$$

所以,当 z 和 $z+\Delta z$ 为由原点出发、辐角为 θ 的射线上的点时,上式成立.

二、函数解析性的判定及其运算

函数解析性的判定可依据定义或定理 2,在利用定理 2 时,特别要注意的是不要忽略了对 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 的可微的考察.函数 $f(z)$ 解析的许多等价条件是应该引起我们注意的,牢记它们可以使我们讨论问题节省很多时间.证明问题的许多技巧无法一一列出,请读者自己在例题中体会.

例 12 讨论下列函数的可导性与解析性:

(1) $f(z)=x^3+3\mathrm{i}x^2y-3xy^2-\mathrm{i}y^3$;

(2) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$; (3) $f(z)=3-z+2z^2$;

(4) $f(z)=|z|^2z$; (5) $f(z)=z^5$.

解 (1) $u(x,y)=x^3-3xy^2$,$v(x,y)=3x^2y-y^3$ 在全平面处处可导,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy;\ \frac{\partial v}{\partial x}=6xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

所以，$f(z)$ 在全平面都满足 C-R 条件，处处可导，处处解析.

(2) $u(x,y)=xy^2, v(x,y)=x^2y$ 在全平面可微，而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2.$$

所以，仅在点(0,0)满足C-R条件. $f(z)$ 在点(0,0)可导，在全平面处处不解析.

(3) $u(x,y)=3-x+2(x^2-y^2), v(x,y)=-y+4xy$ 在全平面可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-1+4x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-4y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=4y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1+4x.$$

所以 $f(z)$ 在全平面都满足 C-R 条件，处处可导，处处解析.

(4) $u(x,y)=(x^2+y^2)x, v(x,y)=(x^2+y^2)y$，在全平面上可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2.$$

所以全平面上只有点(0,0) 满足 C-R 条件，故 $f(z)$ 仅在点(0,0)可导，处处不解析.

(5) $u=x^5-C_5^2x^3y^2+C_5^4xy^4, v=C_5^1x^4y-C_5^3x^2y^3+y^5$ 在全平面可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4-3C_5^2x^2y^2+C_5^4y^4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2C_5^2x^3y+4C_5^4xy^3;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4C_5^1x^3y-2C_5^3xy^3,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=C_5^1x^4-3C_5^3x^2y^2+5y^4.$$

显然，$f(z)$ 在全平面都满足 C-R 条件，处处可导，处处解析.

例 13 设 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$ 在全平面解析，求 m,n,l 的值.

解 因为 $f(z)$ 解析，所以满足C-R条件，由 $u(x,y)=my^3+nx^2y, v(x,y)=x^3+lxy^2$，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xyn,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2m+x^2n;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2xyl.$$

由 C-R 条件，有

$$2xyn=2xyl,\ 3y^2m+x^2n=-3x^2-y^2l.$$

比较系数，得 $l=n,m=-\frac{1}{3}l,n=-3$，故

$$n=-3,\ l=-3,\ m=1.$$

例 14 验证 $f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$ 满足 C-R 条件，并指出解析区域.

解 $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$，$v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$ 在全平面处处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy+x\sin 2xy);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{x^2-y^2}(x\sin 2xy+y\cos 2xy),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2e^{x^2-y^2}(-y\sin 2xy+x\cos 2xy).$$

显然，$f(z)$ 在全平面上处处满足 C-R 条件，从而处处解析.

例 15 证明：如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，则 $f(z)$ 是常数.

(1) $f(z)$ 取实常数； (2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(3) $f'(z)=0$； (4) $|f(z)|$ 等于常数；

(5) $\mathrm{Re}[f(z)]$ 为常数； (6) $\mathrm{Im}[f(z)]$ 为常数；

(7) $\arg f(z)$ 为常数； (8) $u=v^2$；

(9) $au+bv=c$，其中 a,b,c 为不全为零的实常数.

证 (1) 若 $f(z)$ 取实常数，则 $v(x,y)=0$. 于是 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 由 C-R 条件知，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即 $f'(z)=0$. 所以 $f(z)=C$(常数).

(2) $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 在 D 内解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$. 而 $f(z)$ 在 D 内也解析，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 仅当 $u=C_1$（常数），$v=C_2$（常数）时，两组等式同时成立. 所以 $f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$ 为常数.

(3) $f'(z)=0$，则由导数表示式知，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，所以 u,v 为常数. 于是 $f(z)$ 为常数.

(4) $|f(z)|=C$（常数），对 C 进行讨论.

若 $C=0$，则 $u=0,v=0,f(z)=0$ 是常数.

若 $C\neq 0$，$f(z)\neq 0$，但 $f(z)\overline{f(z)}=C^2$，即 $u^2+v^2=C^2$，则两边对 x,y 分别求偏导数，有

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

利用 C-R 条件，由 $f(z)$ 在 D 内解析，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以 $\begin{cases}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$ 为一线性方程组，由于

$$\begin{vmatrix}u & v\\ v & -u\end{vmatrix}=-(u^2+v^2)=-C^2\neq 0,$$

则用克拉默法则解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，所以 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 $u=C_1$，$v=C_2$. 于是，$f(z)$ 为常数.

(5) 若 $\mathrm{Re}[f(z)]$ 为常数，即 $u=C_1$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，因为 $f(z)$ 解析，C-R 条件成立，故 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$，于是，$v=C_2$（常数）. 即 $f(z)$ 为常数.

(6) 与题(5)类似,由 $v=C_1$,得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 因为 $f(z)$ 解析,C-R 条件成立,故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,知 $u=C_2$(常数). 于是 $f(z)$ 为常数.

(7) $\arg f(z)=$ 常数,即 $\arctan\left(\frac{v}{u}\right)=C$. 于是

$$\frac{(v/u)'}{1+(v/u)^2}=\frac{u^2\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{u^2(u^2+v^2)}=\frac{u^2\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{u^2(u^2+v^2)}=0.$$

得
$$\begin{cases}u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\ u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\end{cases}\xrightarrow{\text{C-R条件}}\begin{cases}u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,即 u,v 均为常数. 于是,$f(z)$ 为常数.

(9) $u=v^2$,由 C-R 条件,得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2v\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

所以,由 $(1+4v^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0\Longrightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=0\Longrightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=0\Longrightarrow v$ 为常数,u 也为常数. 于是,$f(z)$ 为常数.

(10) 设 $a\neq 0$,则 $u=\frac{c-bv}{a}$,于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y},$$

由 C-R 条件,得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x}=+\frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y}=+\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\Longrightarrow\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

所以,u,v 必为常数,即 $f(z)$ 为常数.

例 16 证明:若 D 是关于实轴对称的区域,则函数 $f(z)$ 与 $\overline{f(\bar{z})}$ 在 D 内同时解析.

证 因为D是关于实轴对称的区域，所以由$z \in D \Longrightarrow \bar{z} \in D$.
设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - \mathrm{i}v(x,-y) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y).$$

由于$f(z)$解析，$u(x,y)$，$v(x,y)$在D内可微且满足C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

又由$\varphi(x,y) = u(x,-y)$，$\psi(x,y) = -v(x,-y)$，得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial x},\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial x},\qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial v(x,-y)}{\partial y}.$$

知$\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$在D内可微且满足C-R条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

所以$\overline{f(\bar{z})}$也在D内解析.

推论 $f(z)$在上半平面解析的充要条件是$\overline{f(\bar{z})}$在下半平面解析. 其证明可仿效此例作出.

例 17 求函数

$$f_k(w) = (\sqrt[n]{w})_k = |w|^{1/k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg w + 2k\pi)/n},\ k = 0,1,\cdots,n-1$$

在区域$\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + 2\pi$上的导数($\varphi_0$为常数).

解 因为这n个函数都是函数$w = z^n$的单值反函数，所以它们是区域$\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + 2k\pi$上的连续函数(因为它们的模与辐角都连续). 由本节例1知，它们都是$\varphi_0 < \arg w < \varphi_0 + 2\pi$上的解析函数，且有

$$\frac{\mathrm{d}(\sqrt[n]{w})_k}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nw}(\sqrt[n]{w})_k.$$

例 18 若$f(z) = u + \mathrm{i}v$解析，$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{n}$是两个相互垂直的单位向量，将$\boldsymbol{s}$按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$可与$\boldsymbol{n}$重合. 证明：方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

证 设 $s = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，则

$$n = e^{i\theta} \cdot e^{i\pi/2} = -\sin\theta + i\cos\theta.$$

又 $f(z) = u + iv$ 解析，则 u, v 可微，且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. 利用微积分中方向导数的计算公式，可得

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta,\ \frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta.$$

由 $f(z)$ 解析的 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

例 19 证明柯西 - 黎曼方程的极坐标形式（z 平面取极坐标，w 平面取直角坐标）是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

证 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = u(x,y), v = v(x,y)$. 由复合函数的求导法则与直角坐标下 C-R 条件，可得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = -\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}.$$

对比第一式与第四式，第二式与第三式，即得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

例 20 设函数 $w = f(z) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), z = x + iy$，则 C-R 条件可写为

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

且有 $f'(z)=f(z)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=f(z)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{R}\frac{\partial R}{\partial y}\right)$.

证 这是 z 平面取直角坐标系、w 平面取极坐标系时 C-R 条件的证明.

由复合函数求导法则和直角坐标系下 C-R 条件，设 $u=R\cos\varphi, v=R\sin\varphi$，则 $R=\sqrt{u^2+v^2}$，$\tan\varphi=\frac{v}{u}$. 于是，利用反函数的导数，得

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}+\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

对比第一式与第四式，第二式与第三式，即得

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

又由

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}&=\frac{1}{R}(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}(\mathrm{i}\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{1}{R}(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&=\frac{1}{R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}$$

利用上面已证得的 C-R 条件，得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f(z)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=f(z)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{R}\frac{\partial R}{\partial y}\right).$$

由于 $\frac{\partial}{\partial x}(\ln R)=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}(\ln R)=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y}$，故又有

$$f'(z)=f(z)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\ln R)+\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=f(z)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{R}\frac{\partial}{\partial R}(\ln R)\right].$$

例 21　设 $f(z)=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，证明：柯西-黎曼方程为

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{R}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ \frac{\partial R}{\partial\theta}=-rR\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

证　这是 z 平面与 w 平面都用极坐标表示时的 C-R 条件.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，R,φ 是 x,y 的函数，x,y 是 r,θ 的函数. 由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial R}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial\theta}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial R}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial R}{\partial y}.$$

利用上例的结果，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial r}&=\cos\theta\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\sin\theta\left(-R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\&=\frac{R}{r}\left(-r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{R}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.\\\frac{\partial R}{\partial\theta}&=-r\sin\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+r\cos\theta\left(-R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\&=-Rr\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-Rr\frac{\partial\varphi}{\partial r}.\end{aligned}$$

例 22　如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，则

$$\left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2.$$

证　因为 $f(z)$ 解析，所以 u,v 可微，C-R 条件成立.

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=u_x-\mathrm{i}u_y.$$

由于 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，故

$$\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}=\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\ \frac{\partial|f(z)|}{\partial y}=\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

因而 $\left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right)^2=\frac{u^2(u_x^2+u_y^2)+v^2(v_x^2+v_y^2)}{u^2+v^2}$

$$=u_x^2+u_y^2=|f'(z)|^2.$$

例 23 设 $f(z)=a\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\arctan(y/x)$ 在 $x>0$ 时解析，试确定 a 的值.

解 $u=a\ln(x^2+y^2), v=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2ax}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

由 $f(z)$ 解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，得 $a=\frac{1}{2}$.

例 24 函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，证明

$$\Delta|f(z)|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f'(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

证 设 $f(z)=u^2+\mathrm{i}v, |f(z)|^2=u^2+v^2, f(z)$ 在 D 内解析，所以 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数，故

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

因此 $\Delta|f(z)|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2$

$$=2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$+2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right].$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，满足

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

于是

$$\Delta|f(z)|^2=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$=4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]=4|f'(z)|^2.$$

第二节　初等解析函数

主 要 内 容

复变初等函数是一元实初等函数的推广．它与实初等函数有许多相同之处，但也有很大的区别，而这正是我们需要注意的．

一、指数函数

1．函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 称为复变数 z 的指数函数，满足：

(1) $f(z)$ 在复平面内处处解析；

(2) $f'(z)=f(z)$；

(3) 当 $\mathrm{Im}(z)=0$ 时，$f(z)=\mathrm{e}^x$，其中 $x=\mathrm{Re}(z)$．

指数函数又记为 $\qquad \exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$

2．$\qquad |\exp z|=\mathrm{e}^x,\ \mathrm{Arg}(\exp z)=y+2k\pi.$

$$\exp z\neq 0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y.$$

满足加法定理 $\quad \exp z_1+\exp z_2=\exp(z_1+z_2)$；

具有周期性，周期为 $2k\pi\mathrm{i}$，即

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z.$$

二、对数函数

1．满足方程 $\mathrm{e}^w=z\ (z\neq 0)$ 的函数称为对数函数，记作

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z.$$

对数函数是指数函数的反函数，是多值函数，每两个值相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 称为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值.

2. $\ln z$ 在除去原点和负实轴的复平面上处处解析，且 $\dfrac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{z}$. $\mathrm{Ln}z$ 的各分支也在除去原点和负实轴的复平面上解析，且有相同的导数值.

$$\mathrm{Ln}(z_1+z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.$$

这些等式应理解为两边可能取的值在全体意义上相同.

三、乘幂 a^b 与幂函数

1. 乘幂 $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$ ($a\neq 0$ 复数，b 任意复数).

a^b 是多值的. 当 b 为整数时，a^b 单值；当 $b=\dfrac{p}{q}$（p,q 为互质的整数，$q>0$）时，a^b 具有 q 个值，即

$$a^b=\mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right],$$
$$k=0,1,\cdots,(q-1).$$

一般情况下，a^b 有无穷多个值.

2. 幂函数 $w=z^b=\mathrm{e}^{b\ln z}$ 是多值函数. $b=n$ 时，整幂函数 z^n 是单值的. $b=\dfrac{1}{n}$ 时，$w=\sqrt[n]{z}$ 是多值的，有 n 个分支. 一般情况下，$w=z^b$ 是多值的，有无穷多个值.

z^n 在全平面解析. $z^{1/n}$ 和一般的 z^b 在除去原点和负实轴的复平面解析.

四、三角函数与双曲函数

1. 定义 $\cos z=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),\sin z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z},\ \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

2. $\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \sin(z + 2k\pi) = \sin z$，是以 2π 为周期的周期函数.

$\cos(-z) = \cos z$ 是偶函数，$\sin(-z) = -\sin z$ 是奇函数.

$(\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z, \sin z, \cos z$ 在全平面内解析.

欧拉公式成立，$e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

三角函数中关于正弦函数和余弦函数的许多公式仍成立. 因为 $\cos iy = \mathrm{ch}y, \sin iy = \mathrm{sh}y$，所以

$$\cos(x + iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\,\mathrm{ch}y - i\sin x\,\mathrm{sh}y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x\cos iy - \cos x\sin iy = \sin x\,\mathrm{ch}y + i\cos x\,\mathrm{sh}y.$$

$|\sin z| \leqslant 1$ 和 $|\cos z| \leqslant 1$ 不再成立.

3. 定义 $\mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \mathrm{sh}z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$，$\mathrm{cth}a = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z}$ 为双曲余弦、双曲正弦、双曲正切和双曲余切.

4. $\mathrm{ch}z$ 和 $\mathrm{sh}z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

$\mathrm{ch}z$ 是偶函数，$\mathrm{sh}z$ 是奇函数.

$\mathrm{ch}z$ 和 $\mathrm{sh}z$ 在复平面内解析，且

$$(\mathrm{ch}z)' = \mathrm{sh}z,\ (\mathrm{sh}z)' = \mathrm{ch}z,$$

$$\mathrm{ch}iy = \cos y,\ \mathrm{sh}iy = i\sin y,$$

$$\mathrm{ch}(x + iy) = \mathrm{ch}x\cos y + i\,\mathrm{sh}x\sin y,$$

$$\mathrm{sh}(x + iy) = \mathrm{sh}x\cos y + i\,\mathrm{ch}x\sin y,$$

五、反三角函数与反双曲函数

1. 定义 $w = \mathrm{Arccos}z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ 为反余弦函数，$w = \mathrm{Arcsin}z = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ 为反正弦函数，$w = \mathrm{Arctan}z = -\frac{i}{2}\ln\frac{1 + iz}{1 - iz}$ 为反正切函数.

2. 定义 $\mathrm{Arsh}z=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$ 为反双曲正弦，$\mathrm{Arch}z=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$ 为反双曲余弦，$\mathrm{Arth}z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ 为反双曲正切.

疑难解析

1. 叙述复变指数函数与实变指数函数的区别.

答　由于 $\exp z=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，其区别为

(1) $\mathrm{e}^z\neq 0$，而 $\mathrm{e}^x>0$；

(2) $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}$ 是以 $2k\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数，而 e^x 不是周期函数；

(3) e^z 没有乘幂的意义，而 e^x 可视为 e 的 x 次幂；

(4) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在. 而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

2. 怎样区分 e 的 z 次幂与 e^z？

答　由题1知，e^z 没有乘幂的意义，它是单值的，而 e 的 z 次幂是一个多值函数，为了区别，记为 $[\mathrm{e}^z]$.

$$[\mathrm{e}^z]=\exp(z\ln\mathrm{e})=\exp\{z[\ln\mathrm{e}+\mathrm{i}(0+2k\pi)]\}$$
$$=\exp[z(1+2k\pi\mathrm{i})]=\exp z\cdot\exp(2k\pi\mathrm{i}).$$

当 $k=0$ 或 $k\neq 0$，z 为整数时，$[\mathrm{e}^z]=\exp z$.

当 $k\neq 0$，$z=\dfrac{q}{p}$ 时，$[\mathrm{e}^z]$ 与 $\exp z$ 的模相等，辐角不同.

当 $k\neq 0$，z 为无理数时，两者模相等，辐角不同.

当 $k\neq 0$，z 为纯虚数时，两者模不等，辐角相同.

当 $k\neq 0$，z 为复数时，两者模一般不等，辐角一般也不同.

3. $\exp z=\mathrm{e}^z$ 什么时候等于实数？

答　因为 $\exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，所以应有 $\mathrm{e}^x\cdot\sin y=0$. 而 $\mathrm{e}^x\neq 0$，故由 $\sin y=0\Longrightarrow y=k\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots)$. 即当 z 位于

实轴或平行于实轴且与实轴距离为 $k\pi$ 的直线上时，e^z 的值为实数.

4. 叙述复变对数函数与实变对数函数的区别.

答 因为 $\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i$，所以区别为：

(1) $\mathrm{Ln}z$ 是多值函数，$\ln x$ 是单值函数.

(2) $\mathrm{Ln}(z_1z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$，$\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$. 虽然与实对数函数运算法则相同，但意义不同. 复变对数函数等式的意义是全体值的相等，而不是对应分支的相等.

(3) $\mathrm{Ln}z^n \neq n\mathrm{Ln}z$，$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} \neq \dfrac{1}{n}\mathrm{Ln}z$. 例如，对 $\mathrm{Ln}z^2$，当 $z = re^{i\theta}$ 时，$z^2 = r^2e^{i2\theta}$，

$$\mathrm{Ln}z^2 = \ln r^2 + i(2\theta + 2m\pi),\ m = 0,\ \pm 1, \cdots,$$

$$2\mathrm{Ln}z = 2\ln r + i(2\theta + 4k\pi),\ k = 0,\ \pm 1, \cdots.$$

显然，两者实部相等，但虚部可取值却不相同.

(4) $\mathrm{Ln}z$ 的定义域为除零之外的全体复数，而 $\ln x$ 的定义域是 $x > 0$.

5. 为什么 $|\sin z| \leqslant 1$ 与 $|\cos z| \leqslant 1$ 在复数范围内不再成立?

答 因为 $\sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$，所以

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| = \frac{1}{2}|e^{iz} - e^{-iz}|$$

$$= \frac{1}{2}\big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big| = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^{y}|.$$

当 $y \to +\infty$ 时，$e^{-y} \to 0$，$e^{y} \to +\infty$，所以 $|\sin z| \leqslant 1$ 不再成立. 同理可证，不再有 $|\cos z| \leqslant 1$.

又 $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{ch}y$，而

$$\mathrm{ch}y = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}),\ \mathrm{sh}y = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y}).$$

当 $y \to \infty$，$|\mathrm{ch}y|$ 与 $|\mathrm{sh}y| \to \infty$，所以 $|\sin z| \leqslant 1$ 不再成立.

方法、技巧与典型例题分析

关于初等解析函数,我们考虑三个方面的问题.一是关于初等解析函数的计算,二是关于初等解析函数方程的求解,三是关于初等解析函数的等式或不等式的证明.在求解这些问题时,一是要熟悉初等解析函数概念,特别是与实初等函数的区别;二是要善于运用初等解析函数的性质,包括实初等函数的性质来分析和证明.

一、初等解析函数的计算

例 1 设 $z=x+\mathrm{i}y$,计算

(1) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}-2z}|$; (2) $|\mathrm{e}^{z^2}|$; (3) $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}})$.

解 (1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}-2z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}-2(x+\mathrm{i}y)}=\mathrm{e}^{-2x+\mathrm{i}(1-2y)}$,于是 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}-2z}|=\mathrm{e}^{2x}$.

(2) $\mathrm{e}^{z^2}=\mathrm{e}^{(x+\mathrm{i}y)^2}=\mathrm{e}^{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy}$,于是 $|\mathrm{e}^{z^2}|=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$.

(3) $\mathrm{e}^{1/z}=\mathrm{e}^{(x-\mathrm{i}y)/(x^2+y^2)}$,于是

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{1/z})=\mathrm{e}^{x/(x^2+y^2)}\cdot\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例 2 计算下列函数值:

(1) $\mathrm{e}^{(2-\pi\mathrm{i})/3}$; (2) $\mathrm{e}^{1-\pi\mathrm{i}/2}$; (3) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}$; (4) $\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}}$.

解 (1) $$\mathrm{e}^{(2-\pi\mathrm{i})/3}=\mathrm{e}^{2/3}\cdot\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}=\mathrm{e}^{2/3}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{2/3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2/3}(1-\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

(2) $\mathrm{e}^{1-\pi\mathrm{i}/2}=\mathrm{e}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{e}\mathrm{i}$.

(3) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^2(\cos1+\mathrm{i}\sin1)$.

(4) $$\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}}=\cos k\pi+\mathrm{i}\sin k\pi=\begin{cases}1, & k=\pm1,\pm3,\cdots,\\-1, & k=0,\pm2,\pm4,\cdots.\end{cases}$$

例 3 设 $f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/z^4}, & z\neq0,\\0, & z=0,\end{cases}$ 证明:$f(z)$ 在全平面处处

满足 C-R 条件，但在 $z=0$ 不解析，甚至在 $z=0$ 不连续.

证 在 $z\neq 0$ 时，$f(z)=e^{-1/z^4}$ 在复平面上解析，满足 C-R 条件.

在 $z=0$ 点，因为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-1/\Delta x^4}-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{-1/(i\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=0,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}=0$，也满足 C-R 条件.

但 z 沿直线 $y=x$ 趋向于零时，$z=(1+i)x, z^4=-4x^4$，有

$$e^{-1/z^4}=e^{-1/(4x^4)}\to+\infty,$$

所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 不连续.

例 4 讨论 $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 是否存在.

(1) 当 z 沿从原点出发的直线趋向于 ∞ 时；

(2) 当 z 沿双曲线 $xy=1$ 的支趋向于 ∞ 时；

(3) 当 z 沿 $y=x^2$ 趋向于 ∞ 时.

解 (1) 直线的辐角为 $\arg z$，讨论不同的 θ.

当 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\mathrm{Re}z=x\to\infty,\quad |e^z|=e^x\to\infty,$$

所以 $e^z\to\infty$.

当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 时，

$$\mathrm{Re}z=x\to-\infty,\quad |e^z|=e^x\to 0,$$

所以 $e^z\to 0$.

当 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Re}(e^z)=\cos y$ 在 -1 与 1 之间振动，所以 e^z 的极限不存在.

(2) 当 z 沿双曲线 $xy=1$ 的枝趋向 ∞ 时，若以正、负实轴为渐

近线，极限分别为 ∞ 与 0，故 e^z 当 $z \to \infty$ 时极限不存在.

(3) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋向 ∞ 时，在第一象限与第二象限的一枝，极限分别为 ∞ 与 0. 故 e^z 当 $z \to \infty$ 时极限不存在.

例 5 计算下列函数值：

(1) $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})$； (2) $\ln(3-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$； (3) $\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$；

(4) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$； (5) $\ln(\mathrm{ie})$.

解 (1) $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})$ 是多值函数，所以

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})=\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\ k=0,\pm 1,\cdots.$$

(2) $\ln(3-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$ 是 $\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}\,\mathrm{i})$ 的主值，所以

$$\ln(3-\sqrt{3}\,\mathrm{i})=\ln 2\sqrt{3}-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

(3) $\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$ 是 $\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$ 的主值，所以

$$\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})=\ln 1+\mathrm{i}\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}}=\mathrm{i}.$$

(4) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$ 是多值函数，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})&=\ln 5+\mathrm{i}\left[\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]\\&=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\mathrm{i},\\&\qquad k=0,\pm 1,\cdots.\end{aligned}$$

(5) $\ln(\mathrm{ie})$ 是 $\mathrm{Ln}(\mathrm{ie})$ 的主值，所以

$$\ln(\mathrm{ie})=\ln|\mathrm{ie}|+\mathrm{i}\arg(\mathrm{ie})=1+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}.$$

例 6 求下列复数的辐角主值：

(1) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}$； (2) $\mathrm{e}^{-3-4\mathrm{i}}$； (3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(0\leqslant\alpha<\beta<2\pi)$.

解 因为 $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，所以 $\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^z=y+2k\pi$，而 $0\leqslant\arg z<\pi$. 所以

(1) 因为 $\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}=1+2k\pi$，所以 $\arg \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}=1$.

(2) 因为 $\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^{-3-4\mathrm{i}}=-4+2k\pi$，所以 $\arg \mathrm{e}^{-3-4\mathrm{i}}=-4$.

(3) 因为

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right),$$

且 $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$，$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}>0$，所以

$$\operatorname{Arg}(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+2k\pi.$$

当 $\alpha+\beta\leqslant\pi$ 时，$\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}$；

当 $\alpha+\beta>\pi$ 时，$\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}-2\pi=\frac{\alpha+\beta-3\pi}{2}.$

例 7 计算下列函数值：

(1) z^i； (2) $z^{3/4}$； (3) z^π.

解 (1) $z^i=e^{i\operatorname{Ln}z}=e^{i(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}$

$$=e^{i\operatorname{Ln}|z|}e^{-(\arg z+2k\pi)},\ k=0,\pm1,\cdots.$$

(2) $z^{3/4}=e^{3/4\ln z}=e^{3/4\operatorname{Ln}|z|}\cdot e^{3i(\arg z+2k\pi)/4}$

$$=\sqrt[4]{|z|^3}e^{3i(\arg z+2k\pi)/4},\ k=0,1,2,3,$$

当 z 确定时，$z^{3/4}$ 有四个值.

(3) $z^\pi=e^{\pi\operatorname{Ln}z}=e^{\pi(\ln|z|+i\arg z+2k\pi i)}$

$$=|z|^\pi e^{i(\arg z+2k\pi)},\ k=0,\pm1,\cdots.$$

例 8 计算下列函数值：

(1) i^i； (2) $(1+i)^{1-i}$； (3) 2^{1+i}.

解 (1) $i^i=e^{i\operatorname{Ln}i}=e^{i\left[\ln1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]}$

$$=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\ k=0,\pm1,\cdots.$$

(2) $(1+i)^{1-i}=e^{(1-i)\operatorname{Ln}(1+i)}=e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$

$$=e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+\arg z\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right.$$

$$+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\Big],\ k=0,\pm 1,\cdots.$$

(3) $2^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\mathrm{Ln}2}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(\ln 2+2k\pi\mathrm{i})}$

$$=\mathrm{e}^{(\ln 2-2k\pi)+\mathrm{i}(\ln 2+2k\pi)}$$

$$=2\mathrm{e}^{-2k\pi}[\cos\ln 2+\mathrm{i}\sin\ln 2),\ k=0,\pm 1,\cdots.$$

例 9 计算下列函数值：

(1) $(-3)^{\sqrt{5}}$； (2) $\sqrt[3]{-8}$； (3) $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$.

解 (1) $(-3)^{\sqrt{5}}=\mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln(-3)}=\mathrm{e}^{\sqrt{3}(\ln 3+\mathrm{i}(2k+1)\pi)}$

$$=\mathrm{e}^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi$$

$$+\mathrm{i}\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi],$$

$$k=0,\pm 1,\cdots.$$

(2) $\sqrt[3]{-8}=2\sqrt[3]{-1}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/3}$, $k=0,1,2.$

即 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-2$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/3}=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

(3) 设 $w=u+\mathrm{i}v=\sqrt{3+4\mathrm{i}}$，两边平方，得

$$u^2-v^2+2uv\mathrm{i}=3+4\mathrm{i}.$$

解方程组 $$\begin{cases}u^2-v^2=3,\\2uv=4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\pm 2,\\v=\pm 1,\end{cases}$$

即 $$\sqrt{3+4\mathrm{i}}=\pm(2+\mathrm{i}).$$

例 10 试求下列函数的周期：

(1) $\sin 5z$； (2) $\mathrm{e}^{z/5}$.

解 (1) 因为 e^{w} 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$，即 $\mathrm{e}^{w+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{w}$，所以

$$\mathrm{e}^{z/5+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z/5}.$$

又 $\mathrm{e}^{z/5+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(z+10\pi\mathrm{i})/5}=\mathrm{e}^{z/5}$，故 $\mathrm{e}^{z/5}$ 的周期为 $10\pi\mathrm{i}$.

(2) 因为 $\sin w$ 的周期为 2π，即 $\sin(w+2\pi)=\sin w$，所以

$$\sin(5z+2\pi)=\sin 5z.$$

又 $\sin(5z+2\pi)=\sin 5\left(z+\frac{2}{5}\pi\right)=\sin 5z$，故 $\sin 5z$ 的周期为 $\frac{2}{5}\pi$.

例 11 求下列函数值：

(1) $\cos(\pi+5\mathrm{i})$； (2) $\cos(1+\mathrm{i})$； (3) $\sin(1+\mathrm{i})$；

(4) $|\sin z|^2$； (5) $\tan(3-\mathrm{i})$.

解 (1) $\cos(\pi+5\mathrm{i})$

$$=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+5\mathrm{i})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+5\mathrm{i})}]=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-5}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{5}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}})$$

$$=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-5}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)+\mathrm{e}^{5}(\cos\pi-\mathrm{i}\sin\pi)]$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-5}+\mathrm{e}^{5})=-\mathrm{ch}5.$$

(2) $$\cos(1+\mathrm{i})=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}]$$

$$=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-1}(\cos1+\mathrm{i}\sin1)+\mathrm{e}(\cos1-\mathrm{i}\sin1)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos1(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e})+\mathrm{i}\sin1(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e})].$$

(3) $$\sin(1+\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}]$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{e}^{-1}(\cos1+\mathrm{i}\sin1)-\mathrm{e}(\cos1-\mathrm{i}\sin1)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin1(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e})+\mathrm{i}\cos1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})].$$

(4) $$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y+x\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{y-x\mathrm{i}})=\sin x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y.$$

$$|\sin z|^2=\sin^2x\,\mathrm{ch}^2y+\cos^2x\,\mathrm{sh}^2y$$

$$=\sin^2x(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{sh}^2y)+(\cos^2x+\sin^2x)\mathrm{sh}^2y$$

$$=\sin^2x+\mathrm{sh}^2y.$$

(5) $$\tan(3-\mathrm{i})=\frac{\sin(3-\mathrm{i})}{\cos(3-\mathrm{i})}=\frac{\sin3\cos\mathrm{i}-\cos3\sin\mathrm{i}}{\cos3\cos\mathrm{i}+\sin3\sin\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\sin3\,\mathrm{ch}1-\mathrm{i}\cos3\,\mathrm{ch}1}{\cos3\,\mathrm{ch}1+\mathrm{i}\sin3\,\mathrm{ch}1}\ (乘共轭因式)$$

$$=\frac{\sin3\cos3-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1\,\mathrm{ch}1}{\cos^23\,\mathrm{ch}^21+\sin^23\,\mathrm{ch}^21-\sin^23\,\mathrm{ch}1+\sin^23\,\mathrm{ch}^21}$$

$$=\frac{\sin6-\mathrm{i}\sin2}{2(\mathrm{ch}^21-\sin^23)}.$$

例 12 求下列函数值：

(1) Arctan(2 + 3i)；　　(2) Arcsini；　　(3) Arthi.

解　注意反三角函数与反双曲函数多值性.

$$(1)\ \mathrm{Arctan}(2+3\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\,\frac{1+\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\,\frac{-3+\mathrm{i}}{5}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{1}{3}+2k\pi\right)\right]$$

$$=\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}\right]-\frac{\mathrm{i}}{4}\ln\frac{2}{5},$$

$$k=0,\ \pm 1,\cdots.$$

$$(2)\ \mathrm{Arcsini}=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}+\sqrt{1-\mathrm{i}^2})=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1\pm\sqrt{2})$$

$$=\begin{cases}-\mathrm{i}[\ln(\sqrt{2}+1)+\mathrm{i}2k\pi],\\ -\mathrm{i}[\ln(\sqrt{2}-1)+\mathrm{i}(\pi+2k\pi)],\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm 1,\cdots.$$

$$(3)\ \mathrm{Arthi}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{2\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{Lni}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(\mathrm{i})+2k\pi\mathrm{i})=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right),\ k=0,\ \pm 1,\cdots.$$

例 13　讨论当 $z\to\infty$ 时，$\sin z,\cos z,\tan z$ 的性态.

解　因为 $\sin z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，$\cos z=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，所以

$$\tan z=-\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=-\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1}.$$

而 $$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|=|\mathrm{e}^{-y+\mathrm{i}x}|=\mathrm{e}^{-y},\ |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|=\mathrm{e}^{y}.$$

(1) 当 z 沿直线 $z=a+tb(-\infty<t<+\infty,0<\arg b<\pi)$ 的正向趋向于 ∞ 时，$y\to+\infty$，则

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|\to+\infty,\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|\to 0,$$

于是 $$\sin z\to\infty,\ \cos z\to\infty,\ \tan z\to\mathrm{i}.$$

(2) 当 z 沿直线 $z=a+tb$ 的负向趋向于 ∞ 时，$y\to-\infty$.

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|\to+\infty,\ |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|\to 0,$$

于是 $\sin z \to \infty,\ \cos z \to \infty,\ \tan z \to -\mathrm{i}.$

(3) 当 z 沿 $z = a + tb$ ($\arg b = 0$ 或 π) 趋向于 ∞ 时,b 为正实数或负实数.

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathrm{Re}(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)]}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathrm{Re}(a+bt)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a+bt)]}|$$
$$= |\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a+bt)+\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(a+bt)}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a+bt)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)}.$$

$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)}$,均为常数.

则 $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)}\cos[\mathrm{Re}(a+bt)]$ 在 $-\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)}$ 之间摆动.

而 $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)}\cos[-\mathrm{Re}(a+bt)]$ 也在 $-\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)}$ 之间摆动.

故 $\cos z$ 的实部 $\mathrm{Re}(\cos z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)} + \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)})\cos[\mathrm{Re}(a+bt)]$ 在 $-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)} + \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)})$ 与 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)} + \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)})$ 之间摆动. 所以,$\cos z$ 的极限不存在.

类似可知,$\mathrm{Im}(\sin z) = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)} + \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)})\cos[\mathrm{Re}(a+bt)]$ 也在 $-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(a)} - \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(a)})$ 之间摆动. 所以,$\sin z$ 的极限也不存在.

类似地,我们可以得出,$\tan z$ 的极限不存在.

二、初等解析函数方程的求解

例 14 解方程 $\mathrm{e}^z - 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0.$

解 将方程变形,得 $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$,即

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x = |1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}| = 2, \\ y = \mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \cdots,$$

即 $x = \ln 2$,所以 $\mathrm{e}^z = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\mathrm{i},\quad k = 0, \pm 1, \cdots.$

例 15 求方程

$$C_n^1 x + C_n^3 x^3 + \cdots + M(x) = 0$$

的根. 当 n 为偶数时, $M(x)=C_n^{n-1}x^{n-1}$; 当 n 为奇数时, $M(x)=C_n^n x^n$.

解 将方程变形为 $(1+x)^n=(1-x)^n$, 即 $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1$, 则

$$\frac{1+x}{1-x}=e^{2k\pi i/n},\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

当 n 为偶数时, $k\neq\frac{n}{2}$. 于是

$$x=\frac{e^{2k\pi i/n}-1}{e^{2k\pi i/n}+1}=\frac{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}=i\tan\frac{k\pi}{n}.$$

例 16 求解方程 $\ln z=2+\pi i$ 和 $\ln z=2-\frac{\pi}{6}i$.

解 由对数函数定义知

$$z=e^{2+\pi i}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=e^2,$$

$$z=e^{2-\pi i/6}=e^2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right).$$

例 17 解方程 $\sin z+\cos z=2$.

解 $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$,

$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$,

则由所给方程,得

$$\begin{cases}(\sin x+\cos x)\operatorname{ch}y=2,\\(\cos x-\sin x)\operatorname{sh}y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sh}y=0,\\\text{或}\cos x=\sin x,\end{cases}$$

即 $y=0$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k=0,\pm1,\cdots$.

当 $y=0$ 时, $\sin x+\cos x=2$ 无解.

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ 时,若 k 为偶数,则 $\operatorname{ch}y=\sqrt{2}$, 即 $\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})=2\Rightarrow e^y=\sqrt{2}\pm1$(解关于 e^y 的方程),故 $y=\ln(\sqrt{2}\pm1)$.
若 k 为奇数,则 $\operatorname{ch}y=-\sqrt{2}$, 无解.

所以,方程解为

$$\begin{cases} z_1=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1), \\ z_2=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\ln(\sqrt{2}-1), \end{cases} \quad k=0,\pm 1,\cdots.$$

例 18 求出下列方程的全部解：

(1) $\sin z=2$；　　(2) $\operatorname{th}z-1+\mathrm{i}=0$；

(3) $|\operatorname{th}z|=1$；　　(4) $\cos z=a$ (a 为实数).

解 (1) 用反三角函数求解，即

$$z=\operatorname{Arcsin}2=\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{Ln}(2\mathrm{i}\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}[(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}]$$

$$=-\mathrm{i}\left[\ln(2\pm\sqrt{3})+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right]$$

$$=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\mathrm{i}\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k=0,\pm 1,\cdots.$$

(2) $z=\operatorname{Arcth}(1-\mathrm{i})=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1-2\mathrm{i})$

$$=\frac{1}{2}[\ln 5+\mathrm{i}\arctan 2+(2k-1)\pi\mathrm{i}]$$

$$=\frac{1}{4}\ln 5+\frac{\mathrm{i}}{2}[\arctan 2+(2k-1)\pi],\ k=0,\pm 1,\cdots.$$

(3) 因为 $\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{th}z}=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2z}-1}{\mathrm{e}^{2z}+1}$，所以

$$|\operatorname{th}z|=1\Longrightarrow|\mathrm{e}^{2z}-1|=|\mathrm{e}^{2z}+1|.$$

两边平方，并设 $\mathrm{e}^{2z}=u+\mathrm{i}v$，有

$$(u-1)^2+v^2=(u+1)^2+v^2 \quad 或 \quad u=0.$$

由 $u=\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{2z})=\mathrm{e}^{2\operatorname{Re}(z)}\cos[2\operatorname{Im}(z)]$，所以

$$u=0\Longleftrightarrow\cos[2\operatorname{Im}(z)]=0\Longleftrightarrow\operatorname{Im}(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},$$

$$k=0,\pm 1,\cdots.$$

故方程 $|\operatorname{th}z|=1$ 的解为 z ($\operatorname{Im}(z)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k=0,\pm 1,\cdots$，实部任意).

(4) $z=\operatorname{Arccos}a=-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(a+\sqrt{a^2-1})$.

当 $|a|\leqslant 1$ 时，$\sqrt{a^2-1}$ 为纯虚数，$|a+\sqrt{a^2-1}|=1$，

$$z=\mathrm{Arccos}a=-\mathrm{i}\left[\ln 1+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+2k\pi\right)\right]$$

$$=\arccos a+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\cdots.$$

这里 $\arccos a$ 为反余弦函数的主值，此时（$|a|\leqslant 1$），复数意义下的解与通常意义下的解相同.

当 $|a|>1$ 时，$\sqrt{a^2-1}$ 是实数.

若 $a>1$，则 $a\pm\sqrt{a^2-1}>0$，于是

$$\begin{aligned}z=\mathrm{Arccos}a&=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(a\pm\sqrt{a^2-1})\\&=-\mathrm{i}[\ln(a\pm\sqrt{a^2-1})+2k\pi\mathrm{i}]\\&=2k\pi\pm\mathrm{i}\ln(a+\sqrt{a^2-1}).\end{aligned}$$

若 $a<-1$，则 $a\pm\sqrt{a^2-1}<0$，于是

$$\begin{aligned}z=\mathrm{Arccos}a&=-\mathrm{i}[\ln|a\pm\sqrt{a^2-1}|+\mathrm{i}(2k+1)\pi]\\&=(2k+1)\pi\pm\mathrm{i}\ln|a+\sqrt{a^2-1}|.\end{aligned}$$

综上所述，得

$$z=\begin{cases}2k\pi+\arccos a, & |a|\leqslant 1,\\ 2k\pi\pm\mathrm{i}\ln(a+\sqrt{a^2-1}), & a>1,\quad k=0,\pm 1,\cdots.\\ (2k+1)\pi\pm\mathrm{i}\ln(-a-\sqrt{a^2-1}), & a<-1,\end{cases}$$

例 19 解方程 $\sin z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1$.

解 $\sin z=\sin(x+\mathrm{i}y)=\sin x\cos\mathrm{i}y+\cos x\sin\mathrm{i}y$

$$=\sin x\,\mathrm{ch}y+\cos x\,\mathrm{sh}y,$$

得 $$\sin x\,\mathrm{ch}y=0,\ \cos x\,\mathrm{sh}y=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1.$$

解第一式：因为 $\mathrm{ch}y\neq 0$，所以 $x=k\pi$. 代入第二式，得 $\mathrm{sh}y=(-1)^k\mathrm{sh}1$，于是

当 k 为偶数（$0,\pm 2,\pm 4,\cdots$）时，$y=1$；

当 k 为奇数（$\pm 1,\pm 3,\cdots$）时，$y=-1$.

故 $$z=\begin{cases}2n\pi+\mathrm{i},\\(2n+1)\pi-\mathrm{i},\end{cases}\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

三、初等解析函数的证明

做证明题，非常重要的是对基本公式的熟悉与函数间相关关系的了解，借助于不同的表达形式来实现. 高等数学中的许多方法与技巧在复变函数中仍然可以使用.

例 20 证明：$z = x + \mathrm{i}y$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^z.$$

证 令 $z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}+\mathrm{i}\,\frac{y}{n}\right)^n$，则

$$\begin{aligned}\ln|z_n| &= \ln\sqrt{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^n}\\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{n}{2}\left[\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}+o\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]\\ &= x+\frac{x^2+y^2}{2n}+o\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)\to x,\end{aligned}$$

$o(\cdots)$ 表示关于$(\cdots)$的高阶无穷小. 即

$$|z_n|\to \mathrm{e}^x.$$

$$\begin{aligned}\arg z_n &= n\arctan\frac{y/n}{1+x/n} = n\arctan\frac{y}{n+x}\\ &= n\left[\frac{y}{n+x}+o\left(\frac{y}{n+x}\right)\right]\to y,\end{aligned}$$

所以 $$z_n = |z_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z_n} = \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^z.$$

可见，与实一元函数时结果十分相似：

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = \mathrm{e}^x,$$

但证法却完全不同.

例 21 证明：$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时，有

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{z}-1) = \ln r + \mathrm{i}\theta + 2\pi k\mathrm{i},\quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

证 因为 $n(\sqrt[n]{z}-1) = n(r^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}-1)$，所以

$$\operatorname{Re}[n(\sqrt[n]{z}-1)]=n\left[r^{1/n}\cos\frac{(\theta+2k\pi)}{n}-1\right]$$

$$=n\left\{r^{1/n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)^2+o\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)^2\right]-1\right\}$$

（利用了 $\cos x$ 的泰勒公式）

$$=nr^{1/n}\left[-\frac{1}{2}\frac{(\theta+2k\pi)^2}{n^2}+o\left(\frac{(\theta+2k\pi)^2}{n^2}\right)\right]+n(r^{1/n}-1)$$

$$\to 0+\ln r.$$

$$\operatorname{Im}[n(\sqrt[n]{z}-1)]=n\left(r^{1/n}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$=n\left[r^{1/n}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+o\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]\to\theta+2k\pi.$$

所以 $$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{z}-1)=\ln r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi).$$

例 22 证明：$\operatorname{Re}(z^\lambda)\geqslant[\operatorname{Re}(z)]^\lambda$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\operatorname{Re}(z)>0$，z^λ 取主值.

证 设 $z=re^{i\theta}$，则

$$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{Re}(z^\lambda)=r^\lambda\cos\lambda\theta,\ [\operatorname{Re}(z)]^\lambda=r^\lambda\cos^\lambda\theta.$$

记 $f(\theta)=\cos\lambda\theta-\cos^\lambda\theta$，考察 $f(\theta)$ 的正负.

显然，$f(\theta)$ 为偶函数. 当 $\lambda\in(0,1)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(\theta)=\lambda\sin\lambda\theta+\lambda\cos^{\lambda-1}\theta\sin\theta>0$. 所以，当 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(\theta)\geqslant f(0)=0$. 从而，不等式成立.

例 23 试证：$e^{\bar z}=\overline{(e^z)}$；但 $e^{i\bar z}\neq\overline{(e^{iz})}$，仅当 $z=k\pi$ 时，等式才成立，$k=0,\pm1,\cdots$.

证
$$e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^x(\cos y-i\sin y)$$
$$=e^x\,\overline{(\cos y+i\sin y)}=\overline{e^x(\cos y+i\sin y)}$$
$$=\overline{(e^{x+iy})}=\overline{(e^z)}.$$

而
$$e^{i\bar z}=e^{y+ix}=e^y(\cos x+i\sin x),$$
$$\overline{(e^{iz})}=e^{-y-ix}=e^{-y}(\cos x-i\sin x).$$

两式要相等，必须 $e^y=e^{-y}$，$\sin x=-\sin x$，即应有 $y=0$，$x=k\pi$.

于是知，仅当 $z=x+\mathrm{i}y=k\pi$ 时等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{z}}=\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})}$ 才成立.

例 24 证明：函数 $f(z)=\begin{cases} z^5/|z|^4, & z\neq 0, \\ 0, & z=0 \end{cases}$ 在 $z=0$ 处满足 C-R 条件，但在 $z=0$ 不可导.

证 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，在 $z=0$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{|\Delta x|^4}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right)^4=1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}+\mathrm{i}\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\mathrm{i}\frac{\Delta f}{\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\mathrm{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\mathrm{i}\Delta y)^4}{|\mathrm{i}\Delta y|^4}=\mathrm{i}.$$

于是，在 $z=0$，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$. 即满足 C-R 条件. 但是

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}$$

却不存在. 因为，当 z 沿 $y=ax\to 0$ 时，极限值 $(1+\mathrm{i}a)^4/|1+\mathrm{i}a|^4$ 与 a 有关，所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

例 25 试证 $w=\cos z$ 把直线 $\mathrm{Re}(z)=b$ 映为双曲线，把直线 $\mathrm{Im}(z)=d$ 映为椭圆（b,d 为常数）.

证 设 $z=b+\mathrm{i}d,w=u+\mathrm{i}v$，则

$$u+\mathrm{i}v=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+\mathrm{i}d)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(b+\mathrm{i}d)}]$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^d+\mathrm{e}^{-d})\cos b+\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^d-\mathrm{e}^{-d})\sin b,$$

即 $$u=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^d+\mathrm{e}^{-d})\cos b,\quad v=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^d-\mathrm{e}^{-d})\sin b.$$

于是，有双曲线方程和椭圆方程

$$\frac{u^2}{\cos^2 b}-\frac{v^2}{\sin^2 b}=1,$$

$$\frac{u^2}{[(e^d+e^{-d})/2]^2}+\frac{v^2}{[(e^d-e^{-d})/2]^2}=1.$$

例 26 证明：$f(z)=e^{-\frac{1}{|z|}}$ 在 $0<|z|\leqslant \mathbf{R}$ 上一致连续.

证 显然 $\lim\limits_{z\to 0}e^{-\frac{1}{|z|}}=0$，令

$$F(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{|z|}}, & 0<|z|\leqslant \mathbf{R},\\ 0, & z=0,\end{cases}$$

则 $F(z)$ 在 $|z|\leqslant \mathbf{R}$ 上连续. 由于 $|z|\leqslant \mathbf{R}$ 为闭集，依定理：在有界闭区域上连续的函数必然一致连续. 所以 $f(z)$ 在 $0<|z|\leqslant \mathbf{R}$ 上一致连续.

例 27 设函数 $w=e^{-1/z}=e^{-\cos(\mathrm{Arg}z)/|z|}e^{\sin(\mathrm{Arg}z)/|z|}$ 在 $z\neq 0$ 的区域上有定义. 证明：

(1) $e^{-1/z}$ 在 $0<|z|\leqslant 1,|\arg z|\leqslant \frac{\pi}{2}$ 上一致有界.

(2) $e^{-1/z}$ 在 $0<|z|\leqslant 1,|\arg z|\leqslant \frac{\pi}{2}$ 上连续，但不一致连续.

(3) $e^{-1/z}$ 在 $0<|z|\leqslant 1,|\arg z|\leqslant \alpha<\frac{\pi}{2}$ 上一致连续.

证 令 $z=re^{i\theta}$，则 $w=e^{-1/r}e^{-i\theta}=e^{-(\cos\theta+\sin\theta)/r}$.

(1) 在 $0<r\leqslant 1,|\theta|\leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta\geqslant 0$，则 $|w|=e^{-\cos\theta/r}\leqslant 1$，即 $e^{-1/z}$ 一致有界.

(2) 当 $z\neq 0$ 时，因 e^z，$-\frac{1}{z}$ 连续，所以 $e^{-1/z}$ 连续. 取 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，$\theta_2=\frac{\pi}{2}-\delta$，$r_1=\sin\delta$，则

$$\begin{aligned}|e^{-1/z_1}-e^{-1/z_2}|&=|e^{-\cos\theta_1/r_1}e^{i\sin\theta_1/r_1}-e^{-\cos\theta_2/r_2}e^{i\sin\theta_2/r_2}|\\&=|e^{i/r_1}-e^{-\sin\delta/r_1}e^{i\cos\delta/r_1}|\\&=|e^{i/r_1}-e^{-1}e^{i\sqrt{1-r_1^2}/r_1}|\\&\geqslant\left|\cos\frac{1}{r_1}-e^{-1}\cos\frac{\sqrt{1-r_1^2}}{r_1}\right|.\end{aligned}$$

若取 $r_1 = 1\Big/\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$，则 $|e^{-1/z_1} - e^{-1/z_2}| \to |-e^{-1}\cos| > 0$. 所以 z_1 与 z_2 可以相差任意小，但 $|e^{-1/z_1} - e^{-1/z_2}| \not\to 0$，函数在域内不一致连续.

(3) 此时，$|e^{-1/z}| = e^{-1/\cos\theta} \leqslant e^{-1/\cos\alpha} \to 0$，因而函数在闭域上连续，即一致连续.

例 28 证明：对任意的 $z = x + iy$，有

$$|\text{sh}y| \leqslant |\sin z| \leqslant \text{ch}y, \quad |\text{sh}y| \leqslant |\cos z| \leqslant \text{ch}y.$$

证 $|\sin z| = |\sin(x + iy)|$

$$= \sqrt{\sin^2 x\,\text{ch}^2 y + \cos^2 x\,\text{sh}^2 y} = \sqrt{\text{sh}^2 y + \sin^2 x}.$$

类似地
$$|\cos z| = \sqrt{\text{ch}^2 y - \sin^2 x},$$

所以
$$|\text{sh}y| \leqslant \sqrt{\text{sh}^2 y + \sin^2 x} = |\sin z|$$
$$\leqslant \sqrt{\text{sh}^2 y + 1} = \text{ch}y,$$
$$|\text{sh}y| \leqslant \sqrt{\text{ch}^2 y - 1} \leqslant \sqrt{\text{ch}^2 y - \sin^2 x} = |\cos z|$$
$$\leqslant \sqrt{\text{ch}^2 y} = \text{ch}y.$$

例 29 指出下列论断(贝努里悖论)中的错误：

(1) 因为 $(-z)^2 = z^2$，所以 $\text{Ln}(-z)^2 = \text{Ln}z^2$，于是

$$2\text{Ln}(-z) = 2\text{Ln}z \Rightarrow \text{Ln}(-z) = \text{Ln}z;$$

(2)
$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i - x} - \frac{1}{x + i}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2i}\text{Ln}\frac{i - x}{i + x}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2i}\text{Ln}\frac{i - 1}{i + 1}$$
$$= \frac{1}{8i}\text{Ln}\left(\frac{i - 1}{i + 1}\right)^4 = \frac{1}{8i}\text{Ln}1 = 0.$$

解 (1) 因为在对数运算中 $\text{Ln}z^n = n\text{Ln}z$ 不成立. 所以步骤

$$\text{Ln}(-z)^2 = \text{Ln}z^2 \not\Rightarrow 2\text{Ln}(-z) = 2\text{Ln}z.$$

(2) 同上，步骤

$\dfrac{1}{2i}\text{Ln}\dfrac{i - 1}{i + 1}$ 与 $\dfrac{1}{8i}\text{Ln}\left(\dfrac{i - 1}{i + 1}\right)^4$ 间等号不成立.

所以题(1)、题(2) 论断错误.

例 30 证明:当 c 为整数时,有 $(a^b)^c = a^{bc}$.

证 因为 $a^{bc} = e^{bc\mathrm{Ln}a}$,而

$$(a^b)^c = e^{c\mathrm{Ln}a^b} = e^{c\mathrm{Ln}e^{b\mathrm{Ln}a}} = e^{c\mathrm{Ln}e^{\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)}}$$

$$= e^{c\mathrm{Ln}e^{\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)}} = e^{c[\mathrm{Ln}e^{\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)+2k\pi\mathrm{i}}]}$$

$$= e^{c[\mathrm{Re}(b\mathrm{Ln}a)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(b\mathrm{Ln}a)+2k\pi\mathrm{i}]} = e^{c(b\mathrm{Ln}a+2k\pi\mathrm{i})} = e^{bc\mathrm{Ln}a}e^{2k\pi c\mathrm{i}}$$

$$= a^{bc}\cdot e^{2kc\pi\mathrm{i}}.$$

所以,当 c 为整数时,有

$$e^{2kc\pi\mathrm{i}} = 1 \Longrightarrow (a^b)^c = a^{bc}.$$

例 31 设 $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}, a = re^{\mathrm{i}\varphi}$,称

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (0 \leqslant r < R)$$

为泊松(Poisson) 核,证明:

(1) $\dfrac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \dfrac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2}$;

(2) $\dfrac{R - r}{R + r} \leqslant \dfrac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \leqslant \dfrac{R + r}{R - r}$.

证 (1) 因为

$$|z - a|^2 = |Re^{\mathrm{i}\theta} - re^{\mathrm{i}\varphi}|^2$$

$$= |(R\cos\theta - r\cos\varphi) + \mathrm{i}(R\sin\theta - r\sin\varphi)|^2$$

$$= R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2,$$

所以
$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2}.$$

(2) 由于 $-1 \leqslant \cos(\theta - \varphi) \leqslant 1$,得

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \geqslant \frac{R^2 - r^2}{R^2 + 2Rr + r^2} = \frac{R - r}{R + r},$$

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \leqslant \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr + r^2} = \frac{R + r}{R - r},$$

所以
$$\frac{R - r}{R + r} \leqslant \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \leqslant \frac{R + r}{R - r}.$$

例 32 设 $w = f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在 z 平面上区域 D 内解析,且

将 D 单叶映射为 w 平面的区域 G，证明 G 的面积为

$$S = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 由微积分知 uov 平面上区域 G 的面积

$$S = \iint_G \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

而 G 由 D 经坐标变换 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 得到. 因此，有

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而雅可比行列式

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \quad (\text{C-R 条件}) \\ &= (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2.\end{aligned}$$

所以
$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第三节 平面场的复势

主要内容

1. 平面定常向量场

若向量场中的向量都平行于某一个平面 S，且在垂直于 S 的任何一条直线上的所有点处的向量都是相等的，同时场中的向量与时间无关. 于是，完全可以用一个位于平行于 S 的平面 S_0 内的场来表示. 这样的向量场就称为平面定常向量场.

2. 用复变函数表示平面向量场

在平面 S_0 内取定一直角坐标系 xoy，则向量 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$ 可

用复数$A=A_x+\mathrm{i}A_y$表示. 平面向量场$\boldsymbol{A}=A_x(x,y)\boldsymbol{i}+A_y(x,y)\boldsymbol{j}$可借助于复变函数$A=A(z)=A_x(x,y)+\mathrm{i}A_y(x,y)$表示. 反之，复数$w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$也对应一个平面向量场$\boldsymbol{A}=u(x,y)\boldsymbol{i}+v(x,y)\boldsymbol{j}$.

如平面定常流速场$\boldsymbol{v}=v_x(x,y)\boldsymbol{i}+v_y(x,y)\boldsymbol{j}$和电场强度向量$\boldsymbol{E}=E_x(x,y)\boldsymbol{i}+E_y(x,y)\boldsymbol{j}$都可用复变函数来表示.

应用中特别重要的是构造一个解析函数来表示一个无源无旋的平面向量场. 这个解析函数被称为平面向量场的复势函数.

3. 平面流速场的复势

设向量场$\boldsymbol{v}$是不可压缩(即流体密度为常数)的，且在单位域B内是无源场(即管量场)，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\Longrightarrow\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

存在一个二元函数$\psi(x,y)$，使

$$\mathrm{d}\psi(x,y)=-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y\Longrightarrow\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_y,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x.$$

沿等值线$\psi(x,y)=C_1$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{v_y}{v_x}$. 即场$\boldsymbol{v}$在等值线$\psi(x,y)=C_1$上每一点处的向量$\boldsymbol{v}$都与等值线$C_1$相切. 等值线$\psi(x,y)=C_1$称为流线，$\psi(x,y)$称为流函数.

若$\boldsymbol{v}$又是B内的无旋场(即势量场)，则

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{v}=0\Longrightarrow\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0,$$

存在一个二元函数$\varphi(x,y)$，使

$$\mathrm{d}\varphi(x,y)=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y\Longrightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y.$$

$$\mathbf{grad}\varphi=\boldsymbol{v}.$$

$\varphi(x,y)=C_2$称为等势线，$\varphi(x,y)$称为势函数(或位函数).

由于$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$，则解析函数

$$w=f(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$$

称为平面流速场的复势函数. 场 $\boldsymbol{v}$ 可表为

$$\boldsymbol{v} = v_x + \mathrm{i}v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}.$$

4. 静电场的复势

设 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}$ 是一平面静电场，在场内无带电物体时，是无源又无旋的.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}u(x,y) = -E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y,$$

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}v(x,y) = -E_x\mathrm{d}x - E_y\mathrm{d}y,$$

$$\mathbf{grad}v = \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j} = -E_x\boldsymbol{i} - E\boldsymbol{j} = -E.$$

$u(x,y)$ 称为场 $\boldsymbol{E}$ 的力函数，$v(x,y)$ 称为场 $\boldsymbol{E}$ 的势函数. 解析函数

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

称为静电场的复势函数.

场 $\boldsymbol{E}$ 可以用复势表示为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}.$$

疑 难 解 析

1. 为什么要在无源又无旋的平面向量场上讨论复势函数?

答　$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv 0$ 的向量场称为管量场，即无源场. $\mathrm{div}\boldsymbol{A} > 0$ 称源，$\mathrm{div}\boldsymbol{A} < 0$ 称沟(汇).

$\mathbf{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度. $\mathbf{rot}\boldsymbol{A} = 0$ 的向量场称为势量场，即无旋场.

无源又无旋的场，称为调和场，满足 $\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \mathbf{rot}\boldsymbol{A} \equiv 0$. 单连通域上的调和场是一个有势场. $\boldsymbol{A}$ 的势函数为 v，$v = -v_0$，使 $\boldsymbol{A}(x,y) = \mathbf{grad}v_0$. $\boldsymbol{A}$ 的力函数为 u，使 $\boldsymbol{A}_1 = -A_y\boldsymbol{i} + A_x\boldsymbol{j} = \mathbf{grad}u$. u 和 v 都

是调和函数(详见第三章),且 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

在单连通域内,用势函数 $u(x,y)$ 和力函数 $v(x,y)$ 可以构造一个解析函数

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

w 称为复势函数(简称复势).讨论复势就是讨论一个解析函数.

2. 为什么在不同问题中场的复势表示有不同的形式?

答 因为在不同的物理应用中,为了各自的方便,对复势采用了不同的定义,因而复势表示有不同的形式.如

(1) 在平面流速场 $\boldsymbol{v} = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$,有

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = -v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\psi(x,y) = v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y,$$

复势函数为

$$w = f(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y),$$

场 $\boldsymbol{v}$ 的复势表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x + \mathrm{i}v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}.$$

(2) 在平面静电场 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}$,有

$$\mathrm{d}u(x,y) = -E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v(x,y) = -E_x\mathrm{d}x - E_y\mathrm{d}y,$$

复势函数为

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

场 $\boldsymbol{E}$ 可以用复势表为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}.$$

(3) 在稳定状态的平面热流场,与题(2)类似

$$q = -k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -k\,\overline{\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right)}.$$

这里 $\Phi(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y)$ 称为复温度.

方法、技巧与典型例题分析

解决平面向量场的问题较为复杂,它与场论和向量分析、调和

函数与共轭调和函数以及许多力学与物理问题都有密切的联系.因此不仅要熟悉各方面的知识,还要善于根据具体问题将平面调和场问题与复变函数联系起来研究、分析.

例 1 设平面流速场的复势 $f(z)$ 如下,求流体在任一点的流速、势函数、流函数及流体流动的状况.

(1) z; (2) $(z+\mathrm{i})^2$; (3) z^2; (4) $1/(z^2+1)$.

解 因为流动速度 $\boldsymbol{v}$ 同复势 $f(z)$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}=v_x+\mathrm{i}v_y=\overline{f'(z)},$$

所以

(1) $f(z)=z=x+\mathrm{i}y, f'(z)=1$,故 $v=\overline{f'(z)}=1$,势函数 $\varphi(x,y)=\mathrm{Re}[f(z)]=x$,流函数 $\psi(x,y)=\mathrm{Im}[f(z)]=y$.流体以等速 1(单位)从平面左侧向右侧流动(见图 2.2a).

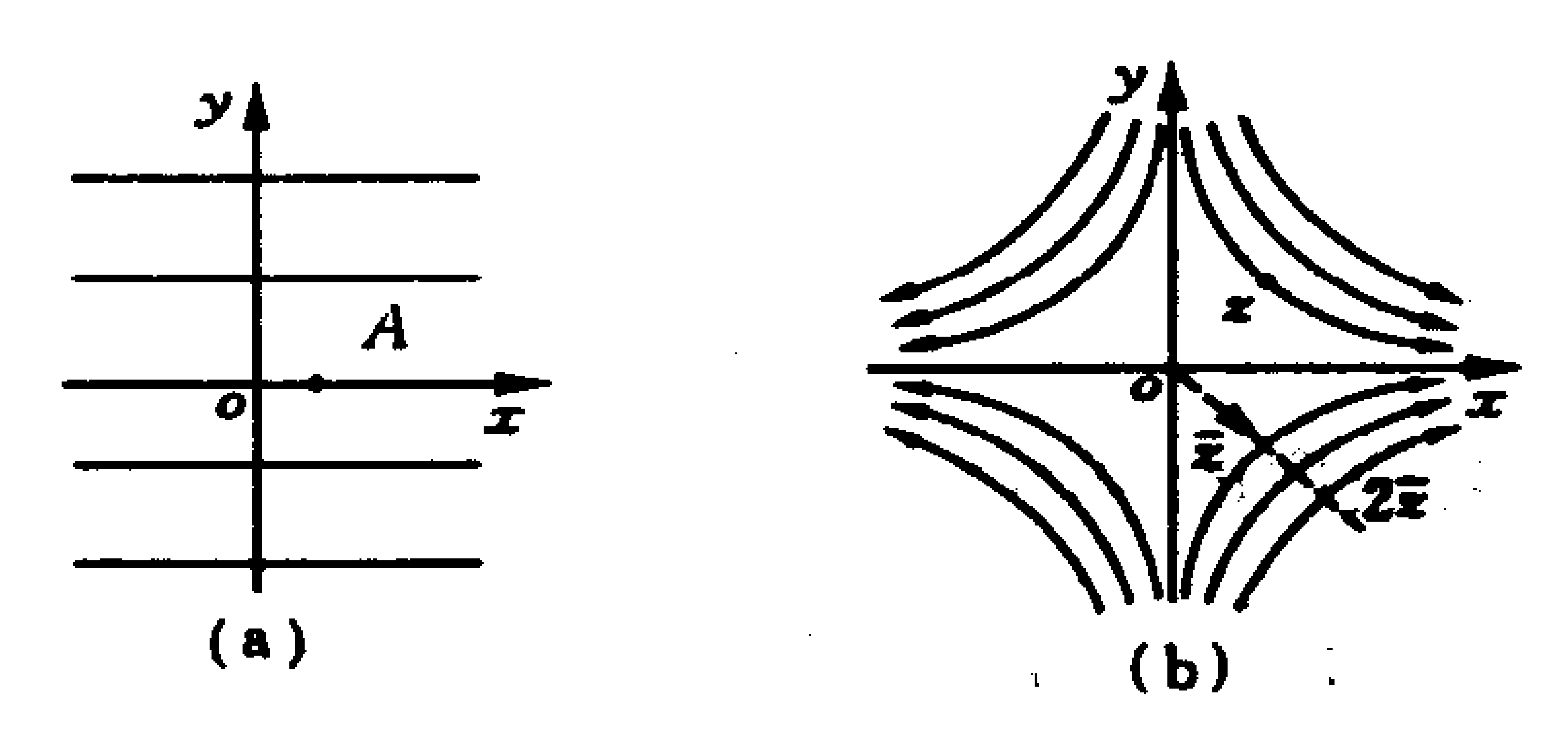


图 2.2

(2) $f(z)=x^2-(1+y)^2+2\mathrm{i}x(1+y), f'(z)=2(z+\mathrm{i})=2x+2\mathrm{i}(y+1)$,故 $v=2(\bar{z}-1)$.势函数 $\varphi(x,y)=x^2-(1+y)^2$,流函数 $\psi(x,y)=x(y+1)$.

(3) $f(z)=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy, f'(z)=2z$,故 $v=\overline{f'(z)}=2\bar{z}$,势函数 $\varphi(x,y)=x^2-y^2$,流函数 $\psi(x,y)=2xy$.流体分别从平面上、下两方用相同速度向实轴移动,相遇后分别沿实轴向左、右方向移动.原点为临界点(见图 2.1b).

(4) $f(z)=\dfrac{x^2+1-y^2-2\mathrm{i}xy}{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}, f'(z)=\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$,故

$$v=\overline{f'(z)}=\frac{-2\bar{z}}{(\bar{z}+1)^2},$$

势函数 $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2+1-y^2}{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}$,

流函数 $\psi(x,y)=\dfrac{-xy}{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}$.

例2 场的等势线为$x^2+y^2=2ax$,试求在点$(2a,0)$与点(a,a)处流速大小的比.

解 等势线方程变形为$\dfrac{x^2+y^2}{2x}=a$,故势函数应为$\varphi=\varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{2x}\right)$,于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)\frac{x^2-y^2}{2x^2}=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi'\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)\frac{y}{x}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

从而复势$\Phi(z)$的导数为

$$\Phi'(z)=\varphi'\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)\frac{x^2-y^2}{2x^2}-\mathrm{i}\varphi'\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)\frac{y}{x},$$

在点$(2a,0)$处速度的大小为

$$|v_1|=\left|\varphi'(a)\frac{4a^2}{8a^2}\right|=\frac{1}{2}|\varphi'(a)|,$$

在点(a,a)处速度的大小为

$$|v_2|=|\varphi'(a)\mathrm{i}|=|\varphi'(a)|,$$

故
$$\frac{|v_1|}{|v_2|}=\frac{1}{2}\frac{|\varphi'(a)|}{|\varphi'(a)|}=\frac{1}{2}.$$

例3 讨论以下列函数为复势的等势线、流速向量、流线:

(1) $1/z^2$; (2) $m\ln z$.

解 (1) $\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}=\dfrac{\cos2\theta}{r^2}-\mathrm{i}\dfrac{\sin2\theta}{r^2}$,

故等势线为$\dfrac{\cos2\theta}{r^2}=C_1$,即$\cos2\theta=r^2C_1$.

流线为$-\dfrac{\sin2\theta}{r^2}=-C_2$,即$\sin2\theta=r^2C_2$.

流速为 $v=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\frac{-2}{z^3}\right)}=-\frac{2}{\bar{z}^3}$.

(2) $f(z)=m\ln r+\mathrm{i}m\theta, f'(z)=\frac{m}{z}$,故

等势线为 $m\ln r=C_1$ 是以原点为圆心的圆.

流线为 $m\theta$,是从原点出发的射线.

流速为 $v=\frac{m}{\bar{z}}=\frac{m}{r}\cos\theta+\mathrm{i}\frac{m}{r}\sin\theta$.

例 4 流速场中散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}\neq 0$ 的点,统称为源点,试求由单个源点所形成的定常流速场的复势.

解 设流速场 $\boldsymbol{v}$ 内只有一个位于坐标原点的源点,其它各点无源无旋,则在 $z\neq 0$ 处 $\boldsymbol{v}=g(r)\boldsymbol{r}^{\circ}$. 其中 $r=|z|$ 是 z 到原点的距离,$\boldsymbol{r}^{\circ}$ 是指向点 z 的向径上的单位向量.

源点的强度 N 是流过圆周 $|z|=r$ 的流量,

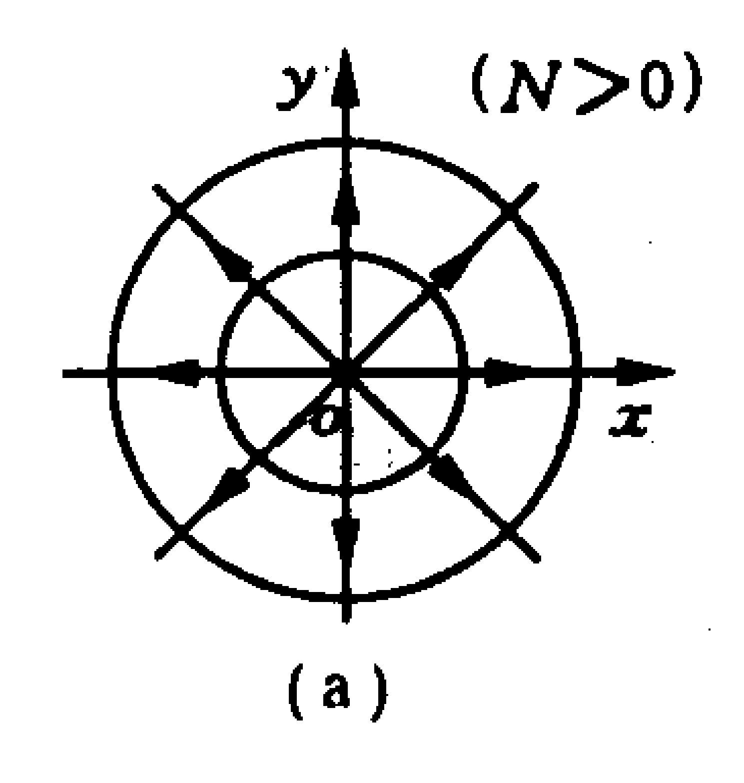
$$N=\int_{|z|=r}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}^{\circ}\mathrm{d}s=\int_{|z|=r}g(r)\boldsymbol{r}^{\circ}\boldsymbol{r}^{\circ}\mathrm{d}s=2\pi|z|g(|z|)$$

是与 r 无关的常数. 故

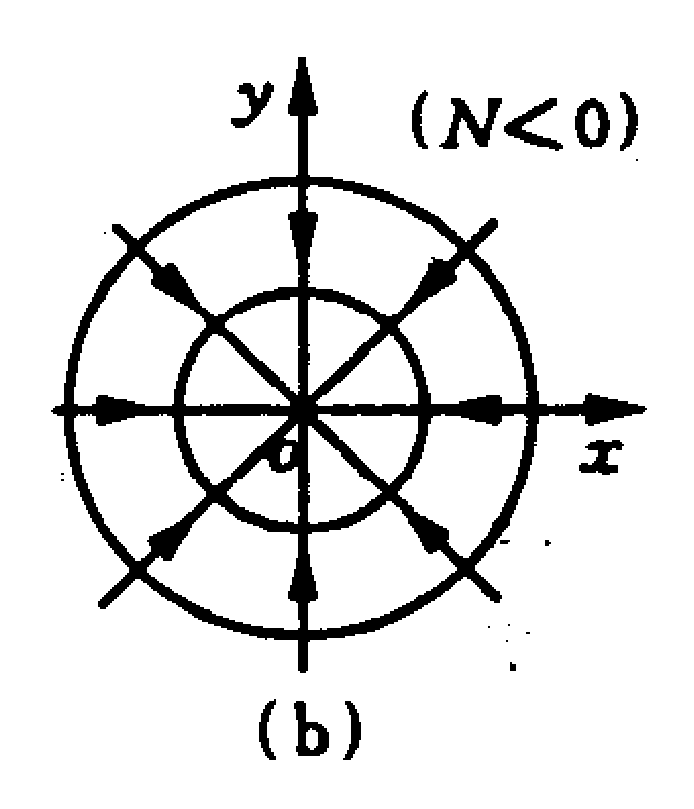
$$g(|z|)=\frac{N}{2\pi|z|},\quad v=\frac{N}{2\pi|z|}\cdot\frac{z}{|z|}=\frac{N}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}.$$

于是 $f'(z)=\overline{v(z)}=\frac{N}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}$ 所求复势函数为

$$f(z)=\frac{N}{2\pi}\ln z+C.$$



(a)



(b)

图 2.3

势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\ln|z|+C_1$,

流函数为 $\psi(x,y)=\dfrac{N}{2\pi}\mathrm{Arg}z+C_2$(见图 2.3).

例 5 平面流速场中 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\neq 0$ 的点称为涡点. 设在平面场仅在原点有单个涡点,无穷远处保持静止状态,求该流速场的复势.

解 场内某点的流速有形式 $\boldsymbol{r}=h(r)\boldsymbol{r}^\circ$,其中 $\boldsymbol{r}^\circ$ 为点 z 处与 $\boldsymbol{r}^\circ$ 垂直的单位向量,可以用复数 $\dfrac{\mathrm{i}z}{|z|}$ 表示,$h(r)$ 为仅与 $r=|z|$ 有关的待定系数.

沿圆周的环量 Γ 是一个常量,与 r 无关

$$\Gamma=\int_{|z|=r}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}^\circ\mathrm{d}s=\int_{|z|=r}h(|z|)\boldsymbol{r}^\circ\cdot\boldsymbol{r}^\circ\mathrm{d}s=2\pi|z|h(|z|),$$

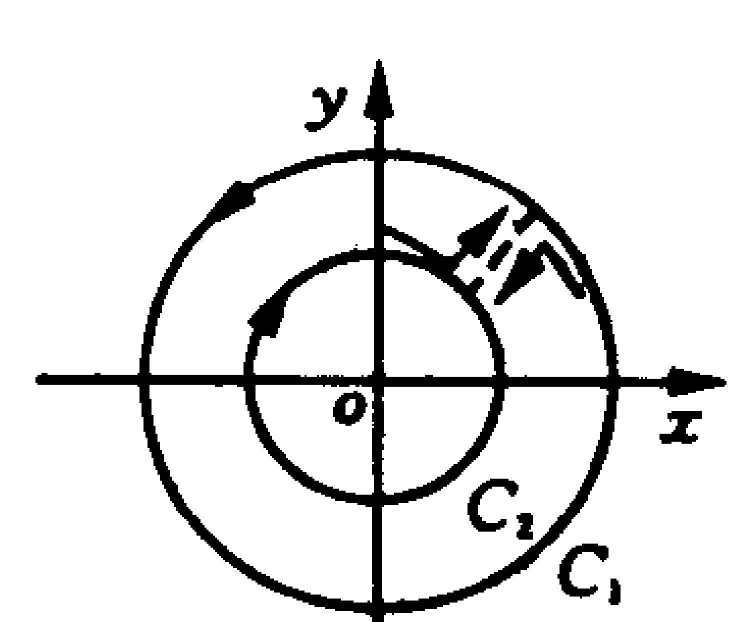


图 2.4

故 $h(|z|)=\dfrac{\Gamma}{2\pi|z|}$, $v=\dfrac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\dfrac{1}{\bar z}$

($-\mathrm{i}\Gamma$ 称涡点的强度).

$\boldsymbol{v}$ 的复势函数为

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{Ln}z+C,$$

势函数为 $\varphi(x,y)=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arg}z+C_1$,

流函数为 $\psi(x,y)=-\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|+C_2$(见图 2.4).

例 6 求以下列函数为流速的流体沿指定曲线的环量与流量:

(1) $v=\dfrac{1}{\bar z^2-1}$, C: $|z-1|=1$, $|z+1|=1$, $|z|=3$;

(2) $v=\dfrac{\bar z^2-1}{(\bar z^2-R^2)^2}$, C: $|z|=R+1$, $R>0$.

解 (1) 沿 $|z-1|=1$ 的环流量为

$$\Gamma+\mathrm{i}Q=\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1},1\right)\text{(见第五章)}$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z^2-1}\right] = \pi i.$$

故，环量 $\Gamma = 0$，流量 $Q = \pi$.

沿 $|z+1| = 1$ 的环流量为

$$\Gamma + iQ = \int_{|z+1|=1}\frac{1}{z^2-1}dz = 2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, -1\right)$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z^2-1}\right] = -\pi i.$$

故，环量 $\Gamma = 0$，流量 $Q = -\pi$.

沿 $|z| = 3$ 的环流量为

$$\Gamma + iQ = \int_{|z|=3}\frac{1}{z^2-1}dz$$

$$= 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, -1\right)\right]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

故，环量 $\Gamma = 0$；流量 $Q = 0$.

(2) 沿 $|z| = R + 1$ 的环流量为

$$\Gamma + iQ = \int_c \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(\overline{V}, R) + \mathrm{Res}(\overline{V}, -R)],$$

其中 $$\mathrm{Res}(\overline{V}, R) = \lim_{z\to R}\frac{d}{dz}\left[(z-R)^2\frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to R}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z+R)^2}\right] = \frac{R^2+1}{4R^2},$$

$$\mathrm{Res}(\overline{V}, -R) = \lim_{z\to -R}\frac{d}{dz}\left[(z+R)^2\frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -R}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z-R)^2}\right] = -\frac{R^2+1}{4R^2}.$$

则 $\Gamma + iQ = \int_c \overline{V}dz = 0$，环量 $\Gamma = 0$，流量 $Q = 0$.

例 7 若 $f(z)$ 为下列函数：

(1) $f(z) = i\ln z$； (2) $f(z) = \dfrac{i}{z}$.

求静电场的等势线、力线和场强向量.

解 (1) $f(z)=\mathrm{i}[\ln|z|+\mathrm{i}\arg z]=-\theta+\mathrm{i}r, f'(z)=\frac{\mathrm{i}}{z}$,故

等势线为 $r=C_1$,即以原点为圆心的同心圆.

力线为 $-\theta=C_2$,即从原点出发的射线.

场强向量 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}=-\mathrm{i}\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.

(2) $f(z)=\frac{y+\mathrm{i}x}{x^2+y^2}, f'(z)=-\frac{\mathrm{i}}{z^2}$,故

等势线为 $\frac{y}{x^2+y^2}=C_1$,即圆周 $\left(x-\frac{1}{2C_1}\right)^2+y^2=\frac{1}{4C_1^2}$,

力线为 $\frac{x}{x^2+y^2}=C_2$,即圆周 $x^2+\left(y-\frac{1}{2C_2}\right)^2=\frac{1}{4C_2^2}$.

场强向量 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\,\overline{f'(z)}=-\mathrm{i}\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{z^2}\right)}=\frac{1}{x^2-y^2-\mathrm{i}2xy}$.

例 8 求一条具有电荷线密度为 e 的均匀带电的无限长直导线 L 所产生的静电场的复势.

解 在 L 上距原点 h 处取微元 $\mathrm{d}h$,其带电量为 $e\mathrm{d}h$,且垂直于 z 平面(设导线在 $z=0$ 处垂直于 z 平面)的任何直线上各点处场强相同,只有与 z 平面平行的分量. 由于微元段 $\mathrm{d}h$ 在点 z 处产生的场强为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{E}|=\frac{e\mathrm{d}h}{r^2+h^2}\ (r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}),$$

则 $$|\boldsymbol{E}|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e\cos t}{r^2+h^2}\mathrm{d}h\ (t\text{ 为 }\mathrm{d}\boldsymbol{E}\text{ 与 }z\text{ 平面交角}).$$

因为 $h=r\tan t, \mathrm{d}h=\frac{r\mathrm{d}t}{\cos^2 t}, \frac{1}{r^2+h^2}=\frac{\cos^2 t}{r^2}$,故

$$|\boldsymbol{E}|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e\cos t}{r}\mathrm{d}t=\frac{2e}{r}.$$

故 $\boldsymbol{E}=\frac{2e}{r}r^{\circ}$ 或 $E=\frac{2e}{\bar{z}}$. 所以

$$f'(z)=\mathrm{i}\bar{E}=-\mathrm{i}\frac{2e}{z},$$

$$f(z)=2e\mathrm{i}\mathrm{Ln}\frac{1}{z}+C,$$

势函数 $u(x,y) = 2e\mathrm{Arg}z + C_1,$

$$v(x,y) = 2e\ln\frac{1}{|z|} + C_2.$$

当 L 竖立在 $z = z_0$ 时，复势为

$$f(z) = 2ei\mathrm{Ln}\frac{1}{z - z_0} + C \text{ (见图 2.5)}.$$

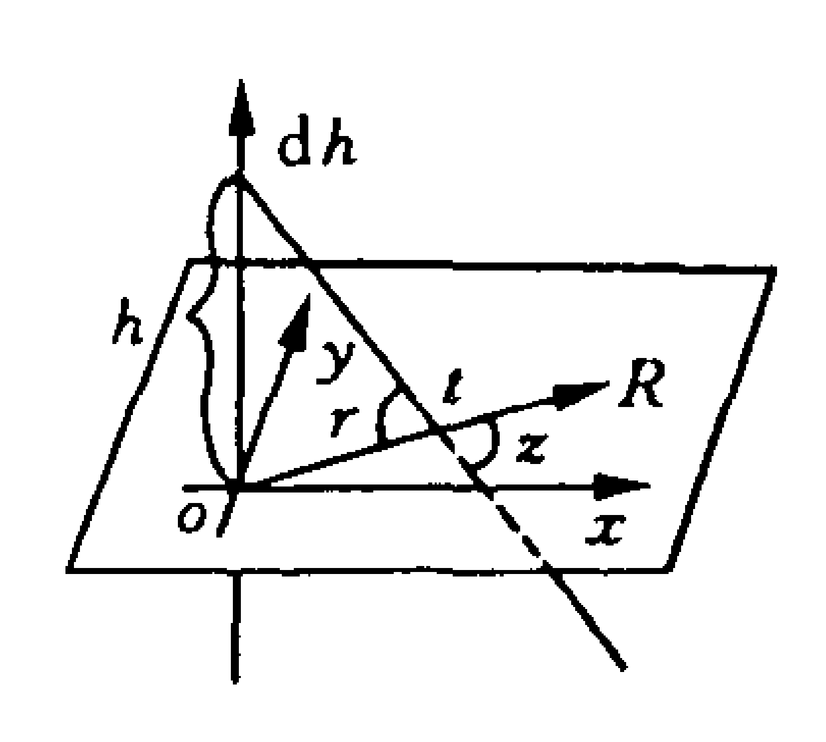


图 2.5

例 9 设复势为 $\Phi(z) = Az + B(A, B$ 为实数)，讨论其热传导、流体流动、静电场的等势线、流线和流动密度.

解 $\Phi(z) = Ax + B + iAy$，故势函数 $\varphi(x,y) = Ax + B$，流函数 $\psi(x,y) = Ay$. 因而

等势线为 $\varphi(x,y) = C_1$，即 $x = \dfrac{1}{A}(C_1 - B)$，是平行 y 轴(虚轴)的直线. 流线为 $\psi(x,y) = C_2$，即 $y = \dfrac{C_2}{A}$，是平行 x 轴的直线.

(1) 若 $\Phi(z)$ 为复温度，等势线即等温线. 复势流密度为

$$q = -k\overline{\Phi'(z)} = -kA = Q_x + iQ_y.$$

热流是均匀的，当 $A > 0$ 时，流向 x 轴负向.

(2) 若 $\Phi(z)$ 为流动复势，则流速为 $v = \overline{\Phi'(z)} = A$.

流动是均匀的，当 $A > 0$ 时，流向 x 轴正向.

(3) 若 $\Phi(z)$ 为复电位，则流动密度为：$d = -\varepsilon\overline{\Phi'(z)} = -\varepsilon A$.

流动是均匀的，当 $A > 0$ 时，流向 x 轴负向.

第三章　复变函数的积分

本章讨论复变函数的概念、性质和计算方法，并且给出讨论解析函数性质的重要公式 —— 柯西 - 古萨定理、复合闭合定理和柯西积分公式．最后讨论了解析函数与调和函数的关系．

第一节　复变函数积分的概念

主要内容

1．设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内，C 为 D 内以 A 为起点 B 为终点的一条光滑（或逐段光滑）的有向曲线．作积分和式 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta_k$，若 $\delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta S_k\} \to 0$ 时，不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何，积分和式的极限惟一存在，则称此极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta_z k.$$

当 C 为闭曲线时，记作 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

2．复变函数积分存在的条件

若 C 为由参数方程 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 给定的光滑曲线，正向是参数增大的方向．α 对应起点 A，β 对应终点 B，且 $z'(t) \neq 0$.

若 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在曲线上连续，$f(z)$ 在曲线 C 上的积分存在，且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

当 C 为分段光滑曲线，$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ 时，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

3. 复变函数积分的计算

根据复变函数积分的定义

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y,$$

(1) 当 C 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 给出时，积分为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$
$$+ \mathrm{i}\int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t)),x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t,$$

将对复积分的计算化为两个实二元函数的线积分来计算.

(2) 上式的另一表示形式为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))f'(t)\mathrm{d}t,$$

这种形式在将 z 用指数式 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示时尤为方便.

常用公式

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

其特点是积分与圆周的中心和半径无关.

4. 复变函数积分的性质

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$,

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$,

(3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z$,

(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}z \leqslant ML$,
其中 L 为曲线 C 的长度，$|f(z)| \leqslant M$.

疑难解析

1. 在复变函数的积分定义中，为什么要强调曲线的起点与终点？

答　因为复变函数的积分定义是由积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 的极限给出的，而将曲线 $C=\overset{\frown}{AB}$ 细分时，是从 A 点开始取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的. 积分和式中的 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 与起点和终点有关. 所以，积分值与起点与终点有关. 有公式

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$$

但是，一般不能把起点为 α、终点为 β 的曲线 C 上 $f(z)$ 的积分记作 $\int_\alpha^\beta f(z)\mathrm{d}z$. 因为复变函数 $f(z)$ 的积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 实际上是曲线积分，z 的变化受曲线 C(积分路线) 的限制.

2. 为什么当 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内处处连续且 C 为光滑曲线时，复变函数的积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在?

答　因为一个复变函数的积分可以化为两个实二元函数的积分，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y,$$

而当 $f(z)$ 连续时，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 必连续，此时两个实二元函数的积分存在，所以积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在.

方法、技巧与典型例题分析

计算沿光滑曲线的复变函数积分，常用的方法是：

(1) 化为两个实二元函数的线积分来计算；

(2) 将 C 的方程用参数方程给出，求 $\int_C f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$；

(3) 将 z 表示为指数式来计算.

凡是在定积分和线积分中使用的技巧，在这里都可照常使用.

注意　当曲线 C 用参数方程表示时，正方向是参数增大的方向. 参数的取值应与起点和终点相对应，且 $z'(t) \neq 0$. 在分段光滑曲线时，要注意各段曲线的起点与终点所对应的参数值的准确性.

例 1　计算积分 $\int_C \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) 连接点 $(0,0)$ 与 $2+\mathrm{i}$ 的直线段；

(2) 连接点 $(0,0)$ 与 i 的直线段及连接点 i 与 $2+\mathrm{i}$ 的直线段所组成.

解　(1) C 可用参数方程表示为 $z=(2+\mathrm{i})t, 0\leqslant t\leqslant 1$，所以

$$\int_C \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}[(2+\mathrm{i})t] = \int_0^1 (2+\mathrm{i})t\mathrm{d}t = 1+\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

(2) C_1 为 $z=\mathrm{i}y, 0\leqslant y\leqslant 1$ 及 C_2 为 $z=x+\mathrm{i}, 0\leqslant x\leqslant 2$，所以

$$\int_C \mathrm{Im}z\mathrm{d}z = \int_0^1 y\mathrm{d}\mathrm{i}y + \int_0^2 1\mathrm{d}(x+\mathrm{i}) = 2+\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

例 2　证明：
$$\left|\int_C \mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |\mathrm{d}z|,$$
并说明这两个积分的几何意义.

证
$$\left|\int_C \mathrm{d}z\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k - z_{k-1}\right|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k - z_{k-1}| = \int_C |\mathrm{d}z|.$$

其几何意义是折线长小于弧长.

例 3 证明：$$\left|\int_C \frac{z+1}{z-1}dz\right| \leqslant 8\pi,$$
其中 C 为圆周 $|z-1|=2$.

证 由估模定理，有

$$\left|\int_C \frac{z+1}{z-1}dz\right| \leqslant \int_C \left|\frac{z+1}{z-1}\right| |dz| = \int_C \frac{|(z-1)+2|}{2}|dz|$$

$$\leqslant \int_C \frac{|z-1|+2}{2}dz = 2\int_C |dz| = 8\pi.$$

例 4 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 C 为以 z_0 为中心、r 为半径的正向圆周，n 为整数(见图 3.1).

解 将 C 表示为：$z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，则

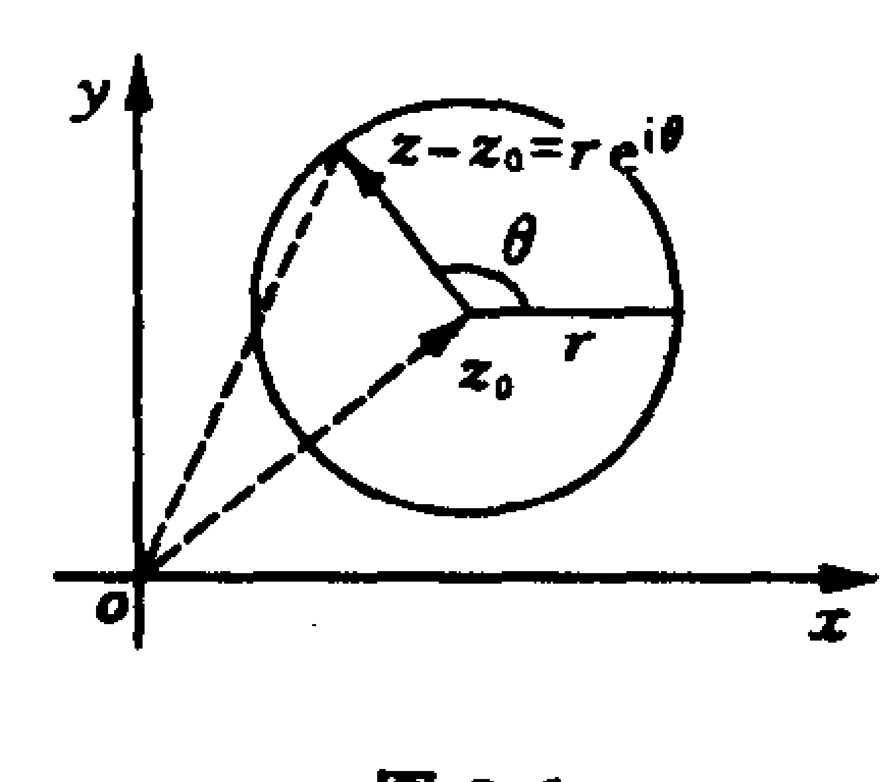


图 3.1

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}}d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta.$$

当 $n=0$ 时，$\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$；

当 $n \neq 0$ 时，

$$\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = 0.$$

所以
$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

类似地，有
$$\int_C \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} (C \text{ 为 } |z|=r),$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} (C \text{ 为 } |z-a|=r).$$

本题结果是我们以后经常要用到的.

例 5 设 $f(z)$ 在连接点 A 与 B 的线段 $\overline{AB}$ 上连续，$|A| < |B|$，$g(x)$ 是区间 $[|A|,|B|]$ 上的非负实函数. 证明：在 $\overline{AB}$ 上存

在一点 ξ,使

$$\int_{\overline{AB}} f(z)g(|z|)\mathrm{d}z = \lambda f(\xi)\int_{\overline{AB}} g(|z|)\mathrm{d}z \quad (|\lambda| \leqslant 1).$$

此题所证为复积分中值定理,也称为达布中值定理.

证 因为 $\overline{AB}$ 的参数方程为 $z = z(t) = (1-t)A + tB, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 由复积分计算公式

$$\begin{aligned}\int_{\overline{AB}} f(z)g(|z|)\mathrm{d}z &= \int_0^1 f[z(t)]g(|z(t)|)z'(t)\mathrm{d}t \\ &= (B-A)\int_0^1 f[z(t)]g(|z(t)|)\mathrm{d}t \\ &\leqslant |B-A|\int_0^1 |f[z(t)]|g(|z(t)|)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

依据推广的实积分中值定理:若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 知存在 $t_0 \in [0,1]$,使

$$\int_0^1 |f[z(t)]|g(|z(t)|)\mathrm{d}t = |f[z(t_0)]|\int_0^1 g(|z(t)|)\mathrm{d}t.$$

令 $\xi = z(t_0)$,则 ξ 在线段 $\overline{AB}$ 上;于是有

$$|I| \leqslant |B-A||f(\xi)|\int_0^1 g(|z(t)|)\mathrm{d}t = |f(\xi)|\int_{\overline{AB}} g(|z|)|\mathrm{d}z|.$$

即 $$\left|\int_{\overline{AB}} f(z)g(|z|)\mathrm{d}z\right| \leqslant |f(\xi)|\int_{\overline{AB}} g(|z|)|\mathrm{d}z|.$$

若 $f(\xi) = 0$,则有 $|I| \leqslant 0$,要证结论必成立.

若 $f(\xi) \neq 0$,则可令

$$\lambda = \frac{\int_{\overline{AB}} f(z)g(|z|)\mathrm{d}z}{f(\xi)\int_{\overline{AB}} g(|z|)|\mathrm{d}z|},$$

于是 $$\int_{\overline{AB}} f(z)g(|z|)\mathrm{d}z = \lambda f(\xi)\int_{\overline{AB}} g(|z|)|\mathrm{d}z|,$$

其中 $$|\lambda| = \frac{\left|\int_{\overline{AB}} f(z) g(|z|) |dz|\right|}{|f(\xi)| \int_{\overline{AB}} g(|z|) |dz|} \leqslant 1.$$

例 6 设 $I = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$，$C$ 为从 r 到 $-r$ 的上半圆周 $|z| = r$. 证明：$\lim\limits_{r \to \infty} I = 0$，$\lim\limits_{r \to 0} I = \pi i$.

证 C 可表示为：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

$$I = \int_0^{\pi} i e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta} d\theta,$$

$$|I| \leqslant \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta} d\theta$$

$$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-\pi r/2} d\theta = \frac{4}{r}(1 - e^{\pi r/4}),$$

所以 $$\lim_{r \to \infty} I = 0.$$

上式利用了当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$ 这一不等式.

类似地，有 $$I - \pi i = i\int_0^{\pi} (e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta} - 1) d\theta,$$

$$|I - \pi i| \leqslant \int_0^{\pi} |e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta} - 1) d\theta$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} re^r d\theta \quad (\text{由 } |e^z - 1| \leqslant |z| e^{|z|})$$

$$= re^r \pi \xrightarrow{r \to 0} 0,$$

所以 $$\lim_{r \to 0} I = \pi i.$$

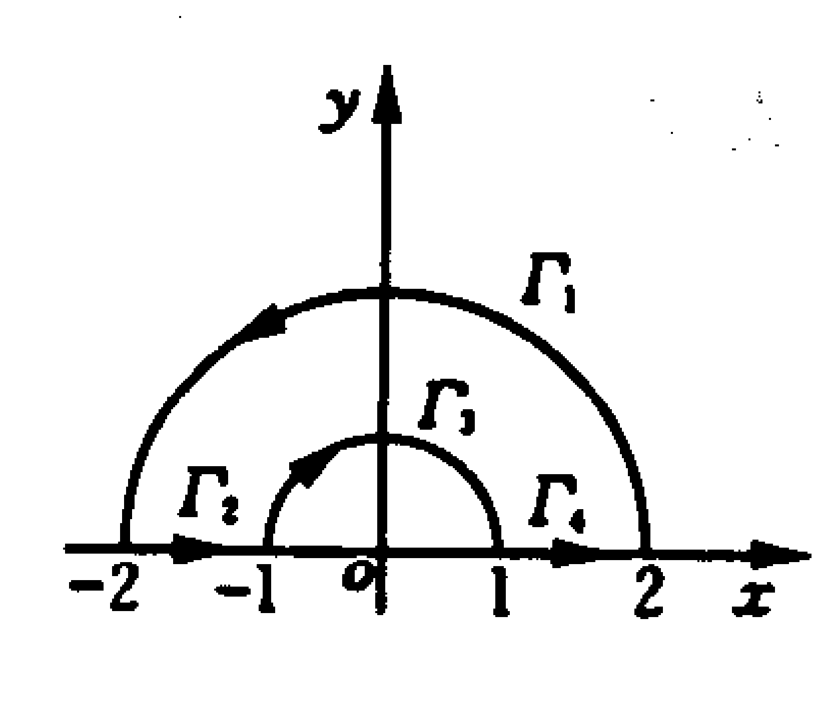


图 3.2

例 7 计算 $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz$. C 如图 3.2 所示.

解 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. 在 Γ_1 上，$z = 2e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，则

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{4} z^2 dz = -\frac{4}{3}$$

$$\left(\text{由} \int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1})\right),$$

在 Γ_3 上，$z=e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，则

$$\int_{\Gamma_3}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_{\Gamma_3}z^2dz=\frac{2}{3},$$

在 Γ_2 和 Γ_4 上，$z=\bar{z}=x$，则

$$\int_{\Gamma_2}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_{-2}^{-1}dx=1,\quad \int_{\Gamma_4}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_1^2 dx=1.$$

所以

$$\int_\Gamma=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}=-\frac{4}{3}+1+\frac{2}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

例 8 计算积分 $\int_C|z-1|dz$ 和 $\int_C|z-1||dz|$，C 为 $|z|=1$.

解 C 表示为 $z=e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, z-1=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$，$|z-1|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$，所以，令 $I=\int_C|z-1|dz$，有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta-8i\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\sin\frac{\theta}{2}\\&=2i\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta\right]-0\\&=8i-4i\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(3\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right)d\frac{\theta}{2}\\&=8i-i\left[-6\cos\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi}\\&=8i-\left(12-\frac{4}{3}\right)i=-\frac{8}{3}i.\end{aligned}$$

也可以这样计算：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{2}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})d\theta\\&=-\left(\frac{2}{3}ie^{3i\theta/2}-2ie^{i\theta/2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{8i}{3}.\end{aligned}$$

令 $I_1=\int_C|z-1||dz|$，则 $|dz|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=d\theta$，有

$$I_1=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^{\pi}|\sin\varphi|d\varphi=8.$$

例 9 若 $|a|\neq R$，证明

$$\int_{|Z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} \leqslant \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

证

$$\int_{|Z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} = \int_{|Z|=R} \frac{|dz|}{|z^2-a^2|} \leqslant \int_{|Z|=R} \frac{|dz|}{||z|^2-|a|^2|}$$

$$= \frac{1}{|R^2-|a|^2|} \int_{|Z|=R} |dz| = \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

例 10 计算下列直线上的积分:

(1) $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz$; (2) $\int_1^i (2+iz)^2 dz$.

解 (1) $z=(\pi+2i)t, 0\leqslant t\leqslant 1$,故

$$I = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi+2i}{2}\right)t \cdot (\pi+2i)dt$$

$$= \frac{\pi+2i}{2}\int_0^1 (e^{i(\pi+2i)t/2}+e^{-i(\pi+2i)t/2})dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+i\right)\left[\int_0^1 e^{-t}\left(\cos\frac{\pi}{2}t+i\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_1^0 e^t\left(\cos\frac{\pi}{2}t-i\sin\frac{\pi}{2}t\right)\right]dt = e+e^{-1}.$$

(2) $z=(i-1)t+1,\ 0\leqslant t\leqslant 1$,故

$$I = (i-1)\int_0^1 [2+i(i-1)t+i]^2 dt$$

$$= (i-1)\int_0^1 [(2+i)^2-2(2+i)(1+i)t+(1+i)^2t^2]dt$$

$$= (i-1)\left[(2+i)^2-(2+i)(1+i)+\frac{1}{3}(1+i)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(-5+7i).$$

例 11(约当引理) 若 $f(z)$ 在 $|z|\geqslant R_0, \mathrm{Im}(z)\geqslant a$ 上连续,且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$,则对任意的正数 m,有

$$\lim_{z\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{imz}f(z)dz = 0,$$

其中 Γ_R 是圆周 $|z|=R$ 在已给域中的一段弧,a 为实数(见图 3.3).

证 设 $a<0$，因为 $f(z)$ 在给定域上连续，必存在 M，使 $|f(z)|\leqslant M$.

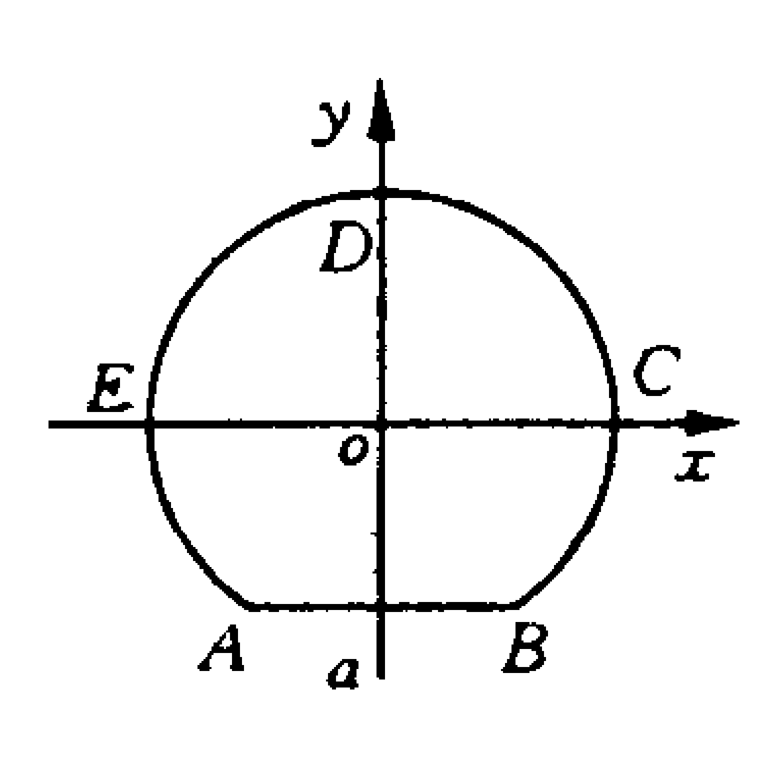


图 3.3

又由于 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，有 $\lim\limits_{|z|=R\to\infty}M=0$.

因为 $|e^{imz}|=|e^{imx-my}|=e^{-my}\leqslant e^{-ma}$.

而 $$\left|\int_{\widehat{BC}}e^{imz}f(z)dz\right|\leqslant Me^{-ma}\int_{\widehat{BC}}|dz| = Me^{-ma}L,$$

其中 L 为弧 BC 的长($M=\sup\{f(z)|z\in\Gamma_R\}$).

又 $L=R\arcsin\dfrac{|a|}{R}=\dfrac{|a|\arcsin(|a|/R)}{|a|/R}=|a|\quad(R\to\infty)$,

所以 $\lim\limits_{R\to\infty}Me^{-ma}L=0$，即 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\widehat{BC}}e^{imz}f(z)dz=0$.

同理可证 $$\lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{EA}}e^{imz}f(z)dz=0.$$

而 $$\left|\int_{\widehat{CDE}}e^{imz}f(z)dz\right|=\left|\int_0^\pi e^{imR(\cos\theta+i\sin\theta)}f(Re^{i})iRe^{i}d\theta\right|$$
$$\leqslant MR\int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}d\theta$$
$$=2MR\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\theta}d\theta\leqslant 2MR\int_0^{\pi/2}e^{-2mR\theta/\pi}d\theta$$
$$=2MR\left[-e^{-mR\theta/\pi}\cdot\frac{\pi}{2mR}\right]_0^{\pi/2}$$
$$=\frac{\pi M}{m}(1-e^{-mR})\to 0\quad(R\to\infty),$$

$\left(\text{依据当 } 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}, \sin\theta\geqslant\dfrac{2\theta}{\pi}\right)$.

故 $$\lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{CDE}}e^{imz}f(z)dz=0.$$

于是 $$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R=\widehat{BC}+\widehat{CDE}+\widehat{EA}}e^{imz}f(z)dz=0.$$

当 $a\geqslant 0$ 时，由 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\widehat{CDE}}e^{imz}f(z)dz=0$，即得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{imz}f(z)dz=0.$$

例 12 计算下列积分：

(1) $\int_C (x - y + \mathrm{i}x^2)\mathrm{d}z$，$C$：直线段从 0 到 $1+\mathrm{i}$；

(2) $\int_C (\mathrm{i} - \bar{z})\mathrm{d}z$，$C$：$y = x^2$ 上从 $z_1 = 0, z_2 = 1+\mathrm{i}$；

(3) $\int_C (z^2 + z\bar{z})\mathrm{d}z$，$C$：$|z| = 1$ 上从 1 到 -1.

解 (1) C 为 $y = x. 0 \leqslant x \leqslant 1$，故

$$I = \int_C (x - x + \mathrm{i}x^2)\mathrm{d}(x + \mathrm{i}x) = \int_0^1 \mathrm{i}x^2(1+\mathrm{i})\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}(\mathrm{i} - 1).$$

(2) $\bar{z} = x - \mathrm{i}y, 1 - \bar{z} = -x + (1+y)\mathrm{i}$，$C$ 为 $z = t + \mathrm{i}t^2$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，故

$$I = \int_0^1 (\mathrm{i} + \mathrm{i}t^2 - 1)(1 + 2\mathrm{i}t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (-3t - 2t^3)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 (1 - t^2)\mathrm{d}t = -2 + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

(3) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, z^2 + z\bar{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 1$，故

$$I = \int_0^{\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 1)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi} - \frac{1}{3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - 1 = -\frac{8}{3}.$$

例 13 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 内连续，记 $M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$，其中 $0 < r < R$，$\lim\limits_{r\to 0} M(r) = 0$，证明：

$$\lim_{r\to 0}\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0,\ K_r: |z - z_0| = r.$$

证 因为 $f(z)$ 连续，所以 $\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z$ 存在. 故

$$\left|\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{K_r} |f(z)||\mathrm{d}z| \leqslant M(r)\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta = 2\pi r M(r).$$

由于 $\lim\limits_{r\to 0} M(r) = 0$，故 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

第二节　柯西-古萨定理与复合闭路定理

主要内容

1. 柯西-古萨(Cauchy-Goursat)基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，那么函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零，即

$$\oint_C f(z) = 0.$$

2. 复合闭路定理(见图 3.4).

设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也不相交，且以 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，C 为边界的区域全含于 D，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，则

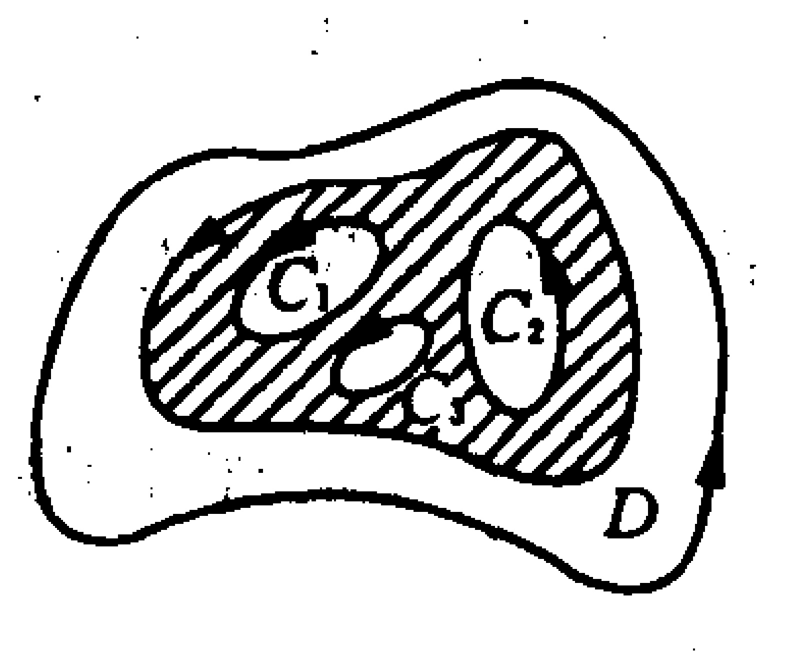


图 3.4

(1) $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$，其中 C 与 C_k 均取正方向；

(2) $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，$\Gamma$ 是由 C 与 C_k 组成的复合闭路.

3. 闭路变形原理

一个解析函数沿闭曲线的积分，不因曲线在区域内作连续变形而改变它的值.

疑难解析

1. 柯西-古萨定理是否可以推广?应用柯西-古萨定理时，要

注意什么问题？

答 柯西-古萨定理成立的条件之一是，曲线C应该在B内. 这个条件可以放宽，得到两个推广定理：

(1) 如果函数$f(z)$在以简单闭曲线C为边界的有界闭域上解析，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 如果$f(z)$在单连通域B内解析，在闭域$\bar{B}$上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad (C\text{ 是 }B\text{ 的边界}).$$

在应用时，要注意$f(z)$是否在单连通域内. 因为B不是单连通域时，定理的结论不成立. 如$f(z)=\frac{1}{z}$，在圆环域$\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$内解析，$C$为域内以原点为圆心的正向圆周，但$\oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\neq 0$.

同时，定理不能反过来用，即不能因为有某个$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$而说$f(z)$在$C$所包围区域$D$解析. 如$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 0$，但$f(z)=\frac{1}{z^2}$在$|z|\leqslant 1$内并不处处解析.

2. 应用复合闭路定理时，要注意些什么问题？

答 首先要搞清楚复合闭路Γ的含义. 复合闭路Γ是由一条正向简单闭曲线C与在C内的若干条互不包含、互不相交的负向简单闭曲线$C_1^-,C_2^-,\cdots,C_n^-$所组成. 一是注意曲线的不同方向，二是曲线必须是简单闭曲线(柯西-古萨定理只要求闭曲线)，三是内部若干条曲线必须互不相交、互不包含，四是全部曲线构成区域边界. 仅当这些条件完全符合时，才可以应用复合闭路定理把沿区域外边界线的回路积分，化为沿区域内边界曲线的回路积分，利用一些已知结果使积分易于计算.

方法、技巧与典型例题分析

应用柯西-古萨基本定理和复合闭路定理计算复积分是比较简单的和直接的，主要是验证是否满足定理条件，是否为单连通域，是否为闭曲线，是否为多连通域，是否为互不相交、互不包含的简单闭曲线. 当 $f(z)$ 有奇点时，要通过分解因式，作出互不相交、互不包含的简单闭曲线 C_k，利用定理求得结果；或者利用已知结果（如上节例 4）. 特别要注意我们在疑难解析中提到的问题.

一、柯西-古萨定理的应用

柯西-古萨定理应用的关键问题是 $f(z)$ 在单连通域内处处解析，所以一要考察区域是否是单连通域，二是确认 $f(z)$ 是否解析. 只要满足此两点，就可对闭曲线 C 上的积分应用定理了.

例 1 计算 $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-2}dz$.

解 利用 $$\int\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, & n=0,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$$

其中 C 是包含 z_0 的任意闭曲线，故

$$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{|z-1|=1}\left(-\frac{1}{z+\sqrt{2}}+\frac{1}{z-\sqrt{2}}\right)dz$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{|z-1|=1}\frac{1}{z-\sqrt{2}}dz=\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

例 2 计算下列积分：

(1) $\oint_C(|z|-e^z\sin z)dz$, C 为 $|z|=a>0$;

(2) $\oint_C\frac{dz}{z(3z+1)}$, C 为 $|z|=\frac{1}{6}$.

解 (1) 因为 $\oint_C|z|dz=\int_0^{2\pi}a\cdot aie^{i\theta}d\theta=0$，而

$$I=\oint_C|z|dz-\oint_C e^z\sin z dz=a\oint_C dz-\oint_C e^z\sin z dz,$$

两个被积函数在复平面内都处处解析，故 $I = 0$.

（2）因为 $$\frac{1}{z(3z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{3}{3z+1},$$

$$I = \int_C \frac{1}{z} - 3\int_C \frac{1}{3z+1}\mathrm{d}z,$$

而 $\frac{1}{3z+1}$ 在 $|z| \leqslant \frac{1}{6}$ 内解析，故 $\int_C \frac{1}{3z+1}\mathrm{d}z = 0$.

$$\int_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \quad（由第一节例 4）.$$

所以 $$I = 2\pi\mathrm{i} - 0 = 2\pi\mathrm{i}.$$

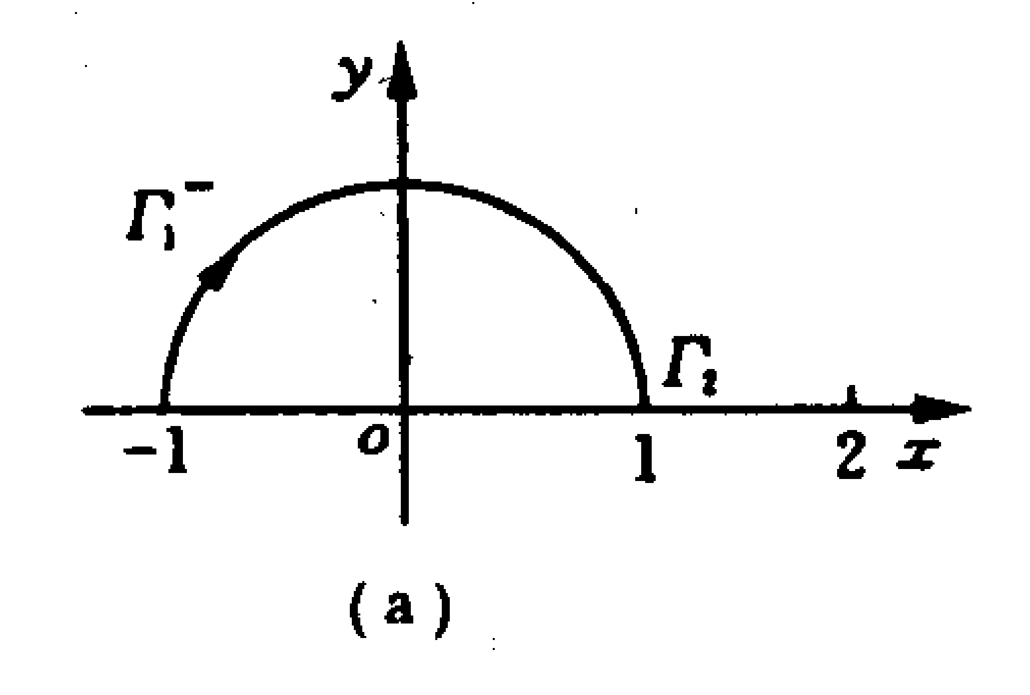
例 3 证明：只要 C 不通过原点，也不绕原点一周，积分 $\int_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$ 的值只与 C 的起点和终点有关，与积分路线无关.

证 取以 $z = -1$ 为起点，$z = 2$ 为终点的曲线来计算积分.

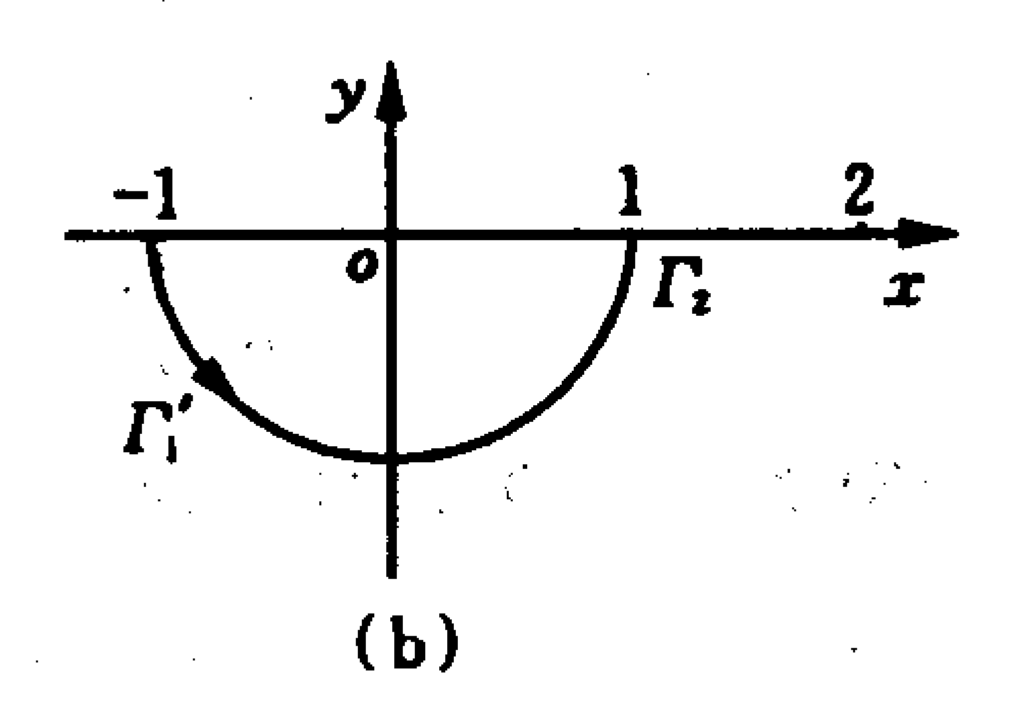
（1）取积分路线 C_1 如图 3.5(a) 所示，$C_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2$，则 $\Gamma_1: z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$；$\Gamma_2: z = x, 1 \leqslant x \leqslant 2$，$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$. 故

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1^-} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{i}\,\frac{-1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Big|_\pi^0 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$



(a)



(b)

图 3.5

（2）取积分路线 C_2 如图 3.5(b) 所示，$C_2 = \Gamma_1' + \Gamma_2$. 则 $\Gamma_1' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-\pi \leqslant \theta \leqslant 0)$，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$；$\Gamma_2: z = x, 1 \leqslant x \leqslant 2$，$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$，故

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1'} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{e^{2i\theta}}ie^{i\theta}d\theta+\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{3}{2}.$$

(3) 对任何一条连接 $z=-1$ 和 $z=2$ 的符合题意的曲线 C，由于被积函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 只有一个奇点 $z=0$，都可以与 C_1 或 C_2 包含在同一个单连通区域内，而 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 又在此区域内解析，所以，沿 C 的积分值与沿 C_1 或 C_2 的积分值相同，即积分与路线无关.

例 4 直接得出下列积分的结果，并说明理由.

(1) $\oint_{|z|=1.5}e^z(z^2+1)dz$； (2) $\oint_{|z|=1.5}\frac{3z+5}{z^2+2z+3}dz$；

(3) $\oint_{|z|=1.5}\frac{e^z}{\cos z}dz$； (4) $\oint_{|z|=r<1}\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}dz$.

解 (1) $I=0$，因为 e^z 与 z^2+1 都在全平面解析，所以被积函数在全平面解析.

(2) $I=0$. 因为 $f(z)$ 的奇点，即分母为零的点有两个：$z_1=-1+\sqrt{2}i$，$z_2=-1-\sqrt{2}i$. 而 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$. 所以，被积函数在 $|z|\leqslant 1.5$ 内解析.

(3) $I=0$. 因为 $f(z)$ 的奇点是使 $\cos z=0$ 的点 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$，但离 $z=0$ 最近的点 $z=\pm\frac{\pi}{2}$ 的 $|z|=\left|\pm\frac{\pi}{2}\right|>1.5$. 所以，被积函数在 $|z|\leqslant 1.5$ 内解析.

(4) $I=0$. 因为被积函数在 C 内解析.

例 5 证明：若积分路线不经过点 $\pm i$，则

$$\int_0^1\frac{1}{1+z^2}dz=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

证 (1) 若 C_1 为 $z=x$，$x\in[0,1]$，则

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 若 C_2 为不绕 $\pm i$ 的曲线，则由于 C_2 可与 C_1 包含在同一单连通域内，依柯西 - 古萨定理，有

$$I=\int_{C_2}\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 若 C_3 绕点 i 一周，则 $C_3\triangleq\Gamma_i+C_1$，$\Gamma_i$ 为简单闭曲线，且点 i 在 Γ_i 内（见图 3.6），故

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z&=\int_{\Gamma_i}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{1+a^2}\\&=\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)\mathrm{d}z+\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2i}2\pi i+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

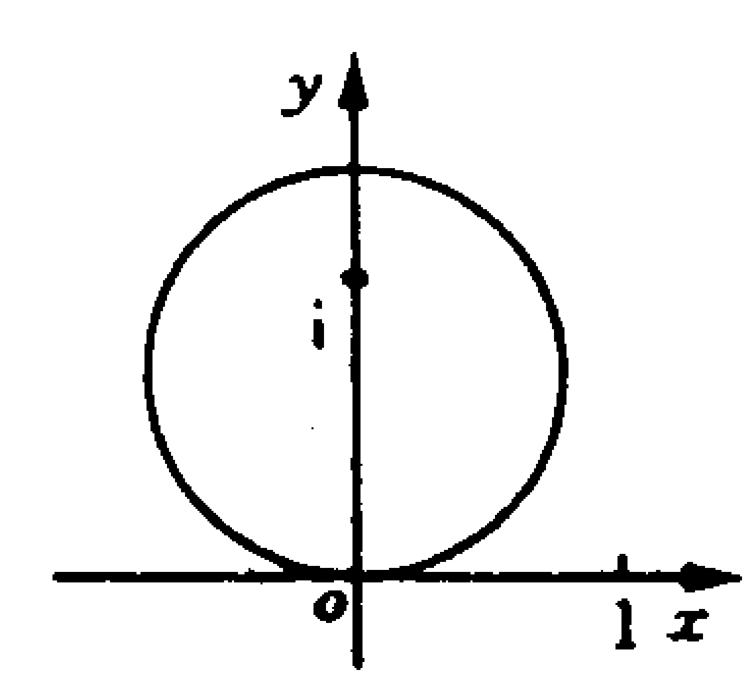


图 3.6

若绕点 i k 周，则 $I=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

(4) 若 C_4 绕点 $-i$ 一周，类似可得

$$I=-\pi+\frac{\pi}{4}.$$

若 C_4 绕点 $-i$ k 周，则 $I=-k\pi+\frac{\pi}{4}$.

综上所述，有

$$\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

例 6 **计算** $\oint_C \mathrm{Ln}z\mathrm{d}z$，**其中**

(1) $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z, C: |z|=1$;

(2) $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z+2\pi i, C: |z|=R$.

解 (1) 因为 $z=e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}i\theta\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}\theta e^{i\theta}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}(\theta\cos\theta+i\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\theta\mathrm{d}\sin\theta+i\int_0^{2\pi}\theta\mathrm{d}\cos\theta\\&=-\theta\sin\theta\Big|_0^{2\pi}+i\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta-i\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=2\pi i\end{aligned}$$

(2) 因为 $z=e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，类似题(1)，有

$$I=\int_0^{2\pi}(\ln R+\mathrm{i}\theta+2\pi\mathrm{i})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}R\ln R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}R\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta-2\pi R\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi R\mathrm{i}.$$

例 7 计算积分$\int_0^{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\bar{z}}\mathrm{d}z$(见图 3.7).

(1) C 为 $0\to 1\to 1+\mathrm{i}$;

(2) C 为 $0\to \mathrm{i}\to 1+\mathrm{i}$.

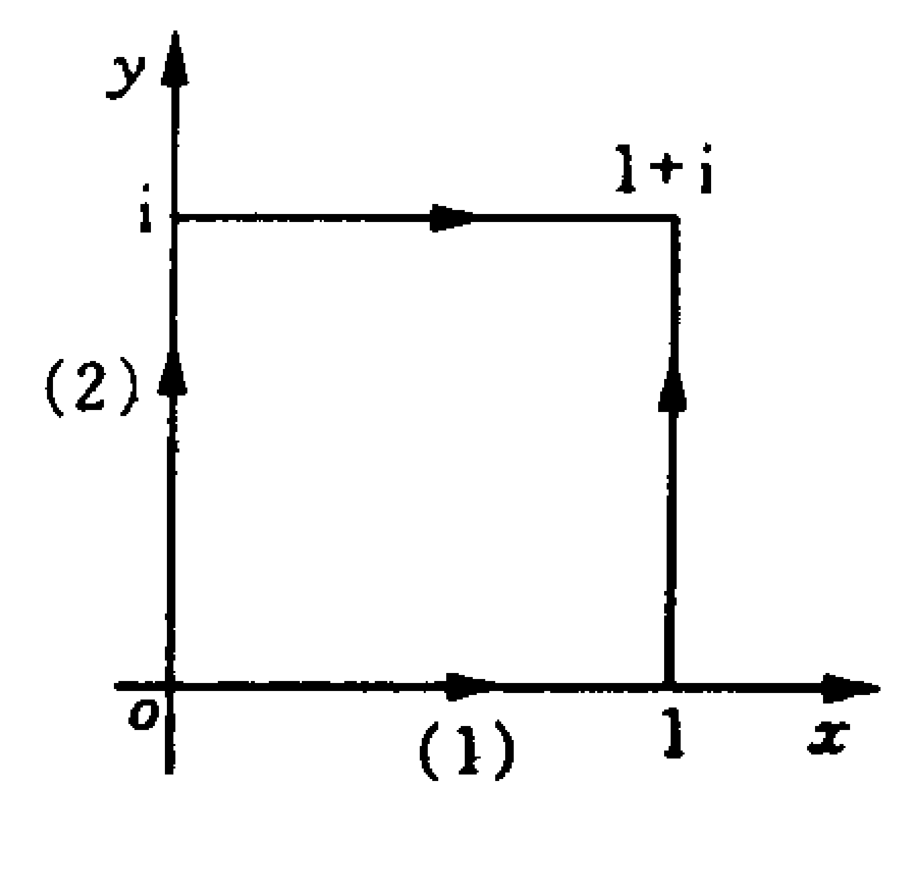


图 3.7

解 (1) $I=\int_0^{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\bar{z}}\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}y}\mathrm{i}\mathrm{d}y$$
$$=\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\Big|_0^1$$
$$=2\mathrm{e}-1-\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}.$$

(2) $I=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}}\mathrm{d}x$

$$=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\Big|_0^1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\mathrm{e}^x\Big|_0^1=1+(\mathrm{e}-2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}.$$

例 8 计算积分$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z-2-\mathrm{i}}$,$C$ 如图 3.8 所示.

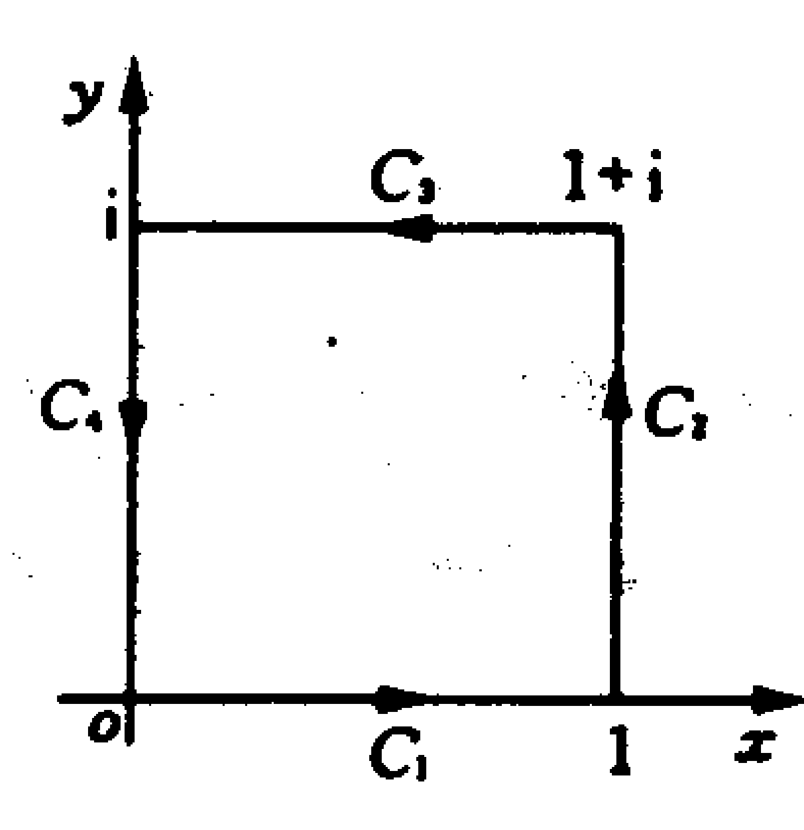


图 3.8

解 由于函数$\frac{1}{z-2-\mathrm{i}}$只有一个奇点 $z=2+\mathrm{i}$,但在 C 外. 依柯西 - 古萨定理,有

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z-2-\mathrm{i}}=0.$$

若用复积分计算,需化为 $I=I_1+I_2+I_3+I_4$,其中

$$I_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x-2-\mathrm{i}}=\int_0^1\frac{(x-2)\mathrm{d}x}{(x-2)^2+1}+\mathrm{i}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}+\mathrm{i}\arctan\frac{1}{3},$$

$$I_2=\int_0^1\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}y}{-1+\mathrm{i}(y-1)}=\int_0^1\frac{(y-1)\mathrm{d}y}{1+(y-1)^2}-\mathrm{i}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+(y-1)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\arctan(-1),$$
$$I_3=\int_1^0\frac{\mathrm{d}x}{x+\mathrm{i}-2-\mathrm{i}}=\int_1^0\frac{\mathrm{d}x}{x-2}=\ln 2,$$
$$I_4=\int_1^0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{i}y-2-\mathrm{i}}=\int_1^0\frac{(y-1)\mathrm{d}y}{4+(y-1)^2}-2\mathrm{i}\int_1^0\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2+4}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}-\mathrm{i}\arctan\left(-\frac{1}{2}\right).$$

所以 $$I=I_1+I_2+I_3+I_4=0.$$

例 9 计算积分 $\oint_{C_i}\frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+1)}$，$C_i$ 为下列曲线：

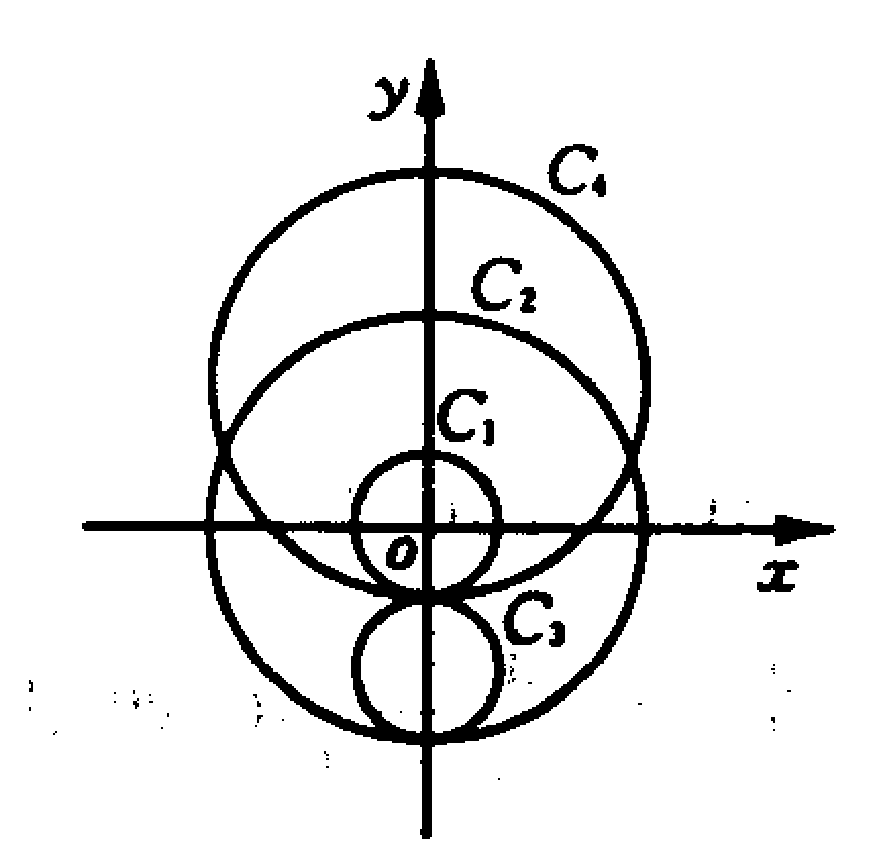


图 3.9

(1) C_1：$|z|=\frac{1}{2}$；

(2) C_2：$|z|=\frac{3}{2}$；

(3) C_3：$|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{2}$；

(4) C_4：$|z-\mathrm{i}|=\frac{3}{2}$.

解 如图 3.9 所示，函数 $\frac{1}{z(z^2+1)}$ 有三个奇点：$z=0$，$z=\pm\mathrm{i}$. 利用柯西-古萨定理及上节例 4 的结果，得

(1) $$I=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}-0-0=2\pi\mathrm{i}.$$

(2) 三个奇点都在 C_2 内，故

$$I=\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0.$$

(3) 只有 $z=-\mathrm{i}$ 在 C_3 内，故

$$I=\oint_{C_3}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$$
$$=0-0-\pi\mathrm{i}=-\pi\mathrm{i}.$$

(4) 有 $z=0,z=\mathrm{i}$ 两个奇点在 C_4 内,故

$$I=\oint_{C_4}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=\pi\mathrm{i}.$$

例 10 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析,C 为 B 内任何一条简单闭曲线,问:

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z=0,\quad \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z=0$$

是否成立?如果成立,给出证明;如果不成立,举例说明.

解 不一定成立.

若 $f(z)$ 为实数或纯虚数时,则 $\mathrm{Re}[f(z)]$ 和 $\mathrm{Im}[f(z)]$ 在 C 内解析,等式一定成立. 否则不一定成立.

如取 $f(z)=z$,C 取 $|z|=1$,则

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

有
$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos\theta[-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sin 2\theta+\frac{\mathrm{i}}{2}2\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=\mathrm{i}\pi\neq 0,$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\sin\theta[-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(-\cos 2\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}2\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=-\pi\neq 0,$$

而
$$\oint_{|z|=1} z\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1} z\mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z+\mathrm{i}\oint_{|z|=1}\mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{i}\pi + \mathrm{i}(-\pi) = 0.$$

例 11 如图 3.10 所示，设区域 D 为右半平面，z 为 D 内圆周 $|z|=1$ 上的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连接原点与 z，证明：$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\right] = \frac{\pi}{4}$.

图 3.10

证[*] 取 C 为 $\overline{oA} + \overset{\frown}{AB}$. $\overline{oA}: \zeta = x, 0 \leqslant x \leqslant 1$; $\overset{\frown}{AB}: z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta > 0$. 则

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \arctan x\Big|_0^1 + \int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta.$$

因为 $\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\right] = \mathrm{Re}[I] = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right]$,

要证 $\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right] = 0.$

$$\int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{i}\int_0^\theta \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{1+\cos2\theta + \mathrm{i}\sin2\theta}\mathrm{d}\theta \text{（乘共轭因式）}$$

$$= \mathrm{i}\int_0^\theta \frac{\cos\theta + \cos\theta\cos2\theta + \sin\theta\sin2\theta + \mathrm{i}(-\cos\theta\sin2\theta + \sin\theta + \sin\theta\cos2\theta)}{(1+\cos2\theta)^2 + (\sin2\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

实部分子为 $-\cos\theta\sin2\theta + \sin\theta + \sin\theta\cos2\theta$

$$= -\cos\theta\sin2\theta + \sin\theta 2\cos^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta(-\sin\theta + \sin\theta) = 0.$$

所以 $\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right] = 0$. 命题得证.

例 12 设 C_1 与 C_2 为相交于 M,N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2. B_1 与 B_2 的公共部分为 B，如图 3.11 所示. 如果 $f(z)$ 在 $B_1 - B$ 与 $B_2 - B$ 内解析，在 C_1 和 C_2 上也解析，证明：

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

证 $C_1 = l_1 + l_1'$, $C_2 = l_2 + l_2'$，方向均为正向. $f(z)$ 在 $B_1 - B$ 及 $l_1 - l_2'$ 上解析，在 $B_2 - B_1$ 及 $l_2 + l_1'$ 上解析.

图 3.11

由柯西-古萨定理，有

$$\oint_{l_1+l_2'^-} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \oint_{l_2+l_1'^-} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

即 $$\int_{l_1} - \int_{l_2'} = \int_{l_2} - \int_{l_1'} \Rightarrow \int_{l_1} + \int_{l_1'} = \int_{l_2} + \int_{l_2'},$$

从而证得 $$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

二、复合闭路定理的应用

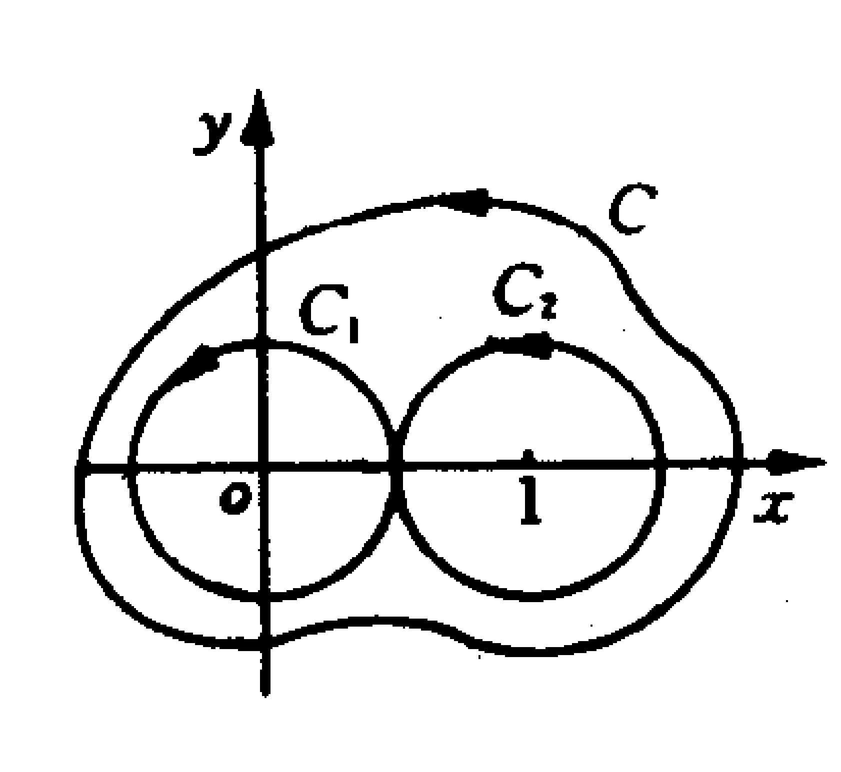


图 3.12

例 13 计算积分 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$. C：包含 $z=0$ 与 $z=1$ 的任意正向简单闭曲线，如图 3.12 所示.

解 $$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

$z=0$ 是 $\frac{1}{z}$ 的奇点，$z=1$ 是 $\frac{1}{z-1}$ 的奇点. 在 $z=0$ 与 $z=1$ 分别作互不相交、互不包含的小圆周. 由复合闭路原理，有

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i} + 0 + 0 + 2\pi\mathrm{i} = 4\pi\mathrm{i}.$$

例 14 若 C 是任意且不经过点 a 的简单闭曲线，n 为整数，证明：

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi \mathrm{i}, & n = -1, a \text{ 在 } C \text{ 内}, \\ 0, & n = -1, a \text{ 在 } C \text{ 外}. \end{cases}$$

证 (1) 若 $n < 0$，且 $n \neq -1$，点 a 在 C 内，则在 C 内作 C_1：$|z-a| = r$. 由复合闭路定理，有

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \oint_{C_1} (z-a)^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= \mathrm{i}r^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} \mathrm{d}\theta = 0.$$

当点 a 在 C 外，则 $(z-a)^n$ 在包含 C 的单连通域内解析，故

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = 0.$$

当 $n > 0$ 时，$(z-a)^n$ 在全平面解析，由柯西-古萨定理，有

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = 0.$$

(2) 若 $n = -1$，且点 a 在 C 内，则在 C 内作 C_1 为 $|z-a| = r$，由复合闭路原理，有

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{d}\theta = 2\pi \mathrm{i}.$$

(3) 若 $n = -1$，且点 a 在 C 外，则 $\dfrac{1}{z-a}$ 在包含 C 的一个单连通域内解析. 由柯西-古萨定理，有

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z = 0.$$

例 15 计算 $\oint_C \dfrac{2z+3}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z$，$C$：$\left| z - \dfrac{\mathrm{i}}{2} \right| = 1$.

解 被积函数有三个奇点：$z = 0$，$\pm \mathrm{i}$. 其中 0 和 i 在 C 内. 作 C_1 和 C_2 互不相交、互不包含，分别包围 0 和 i.

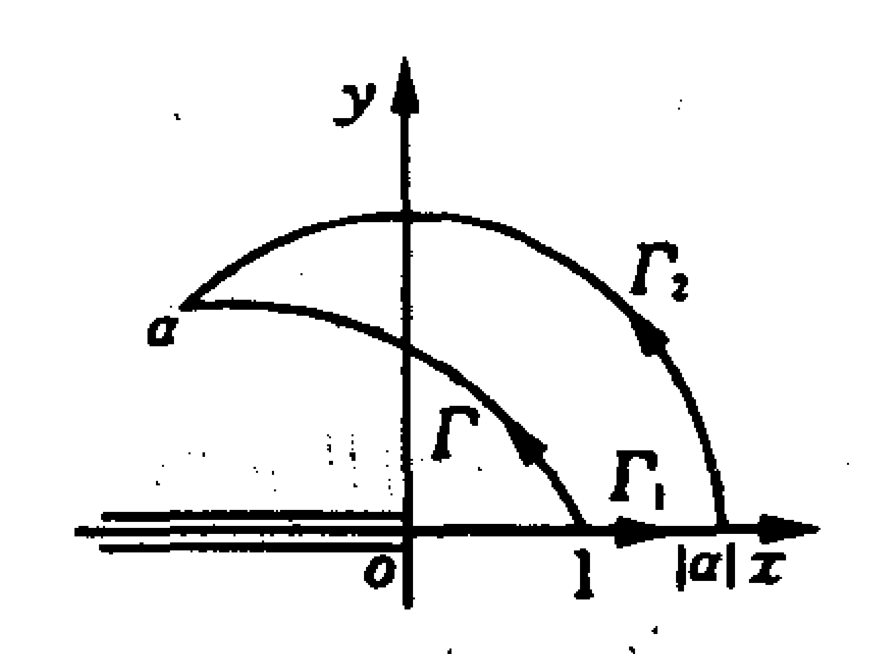
因为

$$\frac{2z+3}{z(z^2+1)} = \frac{3}{z} + \frac{1}{z+\mathrm{i}}\left(-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\right) + \frac{1}{z-\mathrm{i}}\left(-\frac{3}{2} - \mathrm{i}\right),$$

所以，依柯西 - 古萨定理，有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2z+3}{z(z^2+1)}dz &= \oint_C \frac{3}{z}dz + \oint_C\left(-\frac{3}{2}+i\right)\frac{1}{z+i}dz \\ &\quad + \oint_C\left(-\frac{3}{2}-i\right)\frac{1}{z-i}dz \\ &= \oint_{C_1}\frac{3}{z}dz + \oint_{C_2}\left(-\frac{3}{2}-i\right)\frac{dz}{z-i} \\ &= 3\cdot 2\pi i + \left(-\frac{3}{2}+i\right)2\pi i \\ &= \left(\frac{3}{2}-i\right)2\pi i.\end{aligned}$$

例 16 设 D 为复平面去掉原点及负实轴后的区域. Γ 是 D 以 $z=1$ 为起点、α 为终点的曲线. 证明：



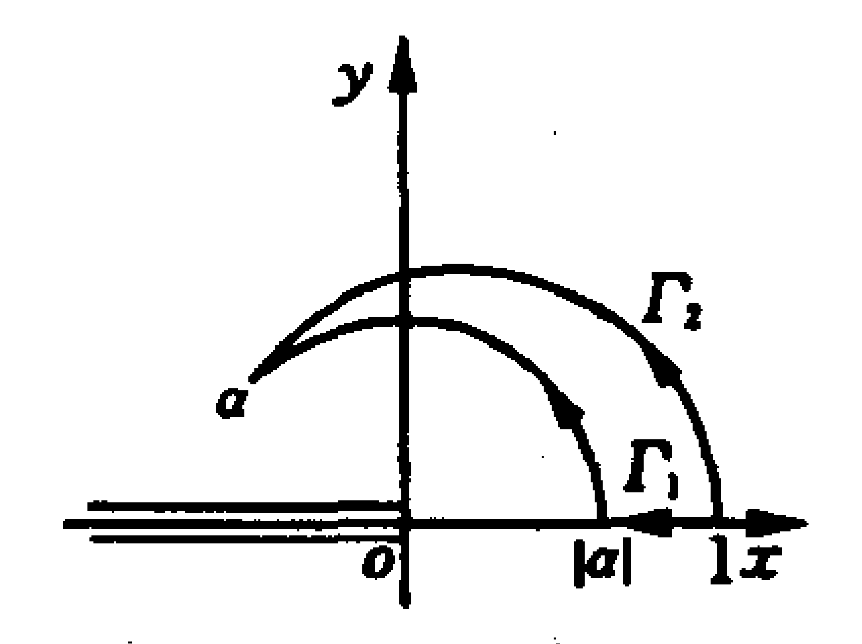


图 3.13

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \ln\alpha.$$

证 设 Γ_1 为从 1 到 $|\alpha|$ 在实轴上的线段，Γ_2 为以原点为圆心，$|\alpha|$ 为半径的圆周上从 $|\alpha|$ 到 α 的圆弧.

(1) 若 $|\alpha|>1$，由柯西 - 古萨定理，有

$$\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_2}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma^-}\frac{dz}{z}=0.$$

故
$$\begin{aligned}\int_\Gamma\frac{dz}{z} &= \int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_2}\frac{dz}{z} = \int_1^{|\alpha|}\frac{1}{x}dx+\int_0^{\arg\alpha}\frac{|\alpha| ie^{i\theta}}{|\alpha|e^{i\theta}}d\theta \\ &= \ln x\Big|_1^{|\alpha|}+i\theta\Big|_0^{\arg\alpha} = \ln|\alpha|+i\arg\alpha=\ln\alpha.\end{aligned}$$

(2) 若 $|\alpha|<1$，由柯西 - 古萨定理，有

$$\int_{\Gamma}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_1}-\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_2}-\frac{dz}{z}=0.$$

故 $$\int_{\Gamma}\frac{dz}{z}=\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_2}\frac{dz}{z}=\int_1^{|\alpha|}\frac{1}{x}dx+\int_0^{\arg\alpha}\frac{\alpha|\alpha|ie^{i\theta}}{|\alpha|e^{i\theta}}d\theta$$

$$=\ln x\Big|_1^{|\alpha|}+i\theta\Big|_0^{\arg\alpha}=\ln|\alpha|+i\arg\theta=\ln\alpha.$$

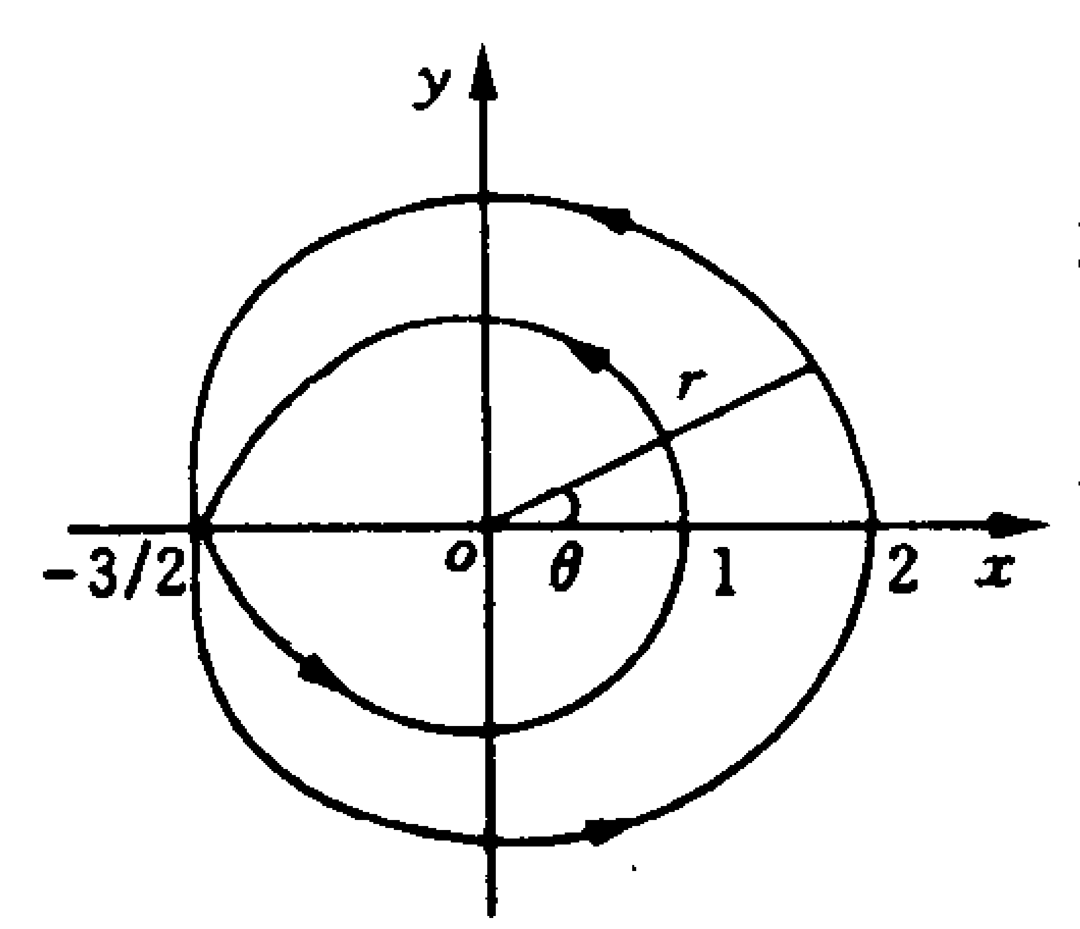


图 3.14

例 17 设 C 为极坐标方程 $r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$ 定义的闭曲线(见图 3.14),证明:$\oint_C\frac{1}{z}dz=4\pi i$,并说明为什么与 $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i$ 不一致.

解 $C:r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$ 可化为

$C:r=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$,是 $T=4\pi$ 的周期函数. $C=C_1+C_2$, C_1 与 C_2 都是绕 $z=0$ 的闭曲线. 当 r 在 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 上变化时为 C_1,当 r 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上变化时为 C_2. 所以

$$\oint_C\frac{1}{z}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=2\pi i+2\pi i=4\pi i.$$

而 $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz$ 的积分路线是单位圆周,所以

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i.$$

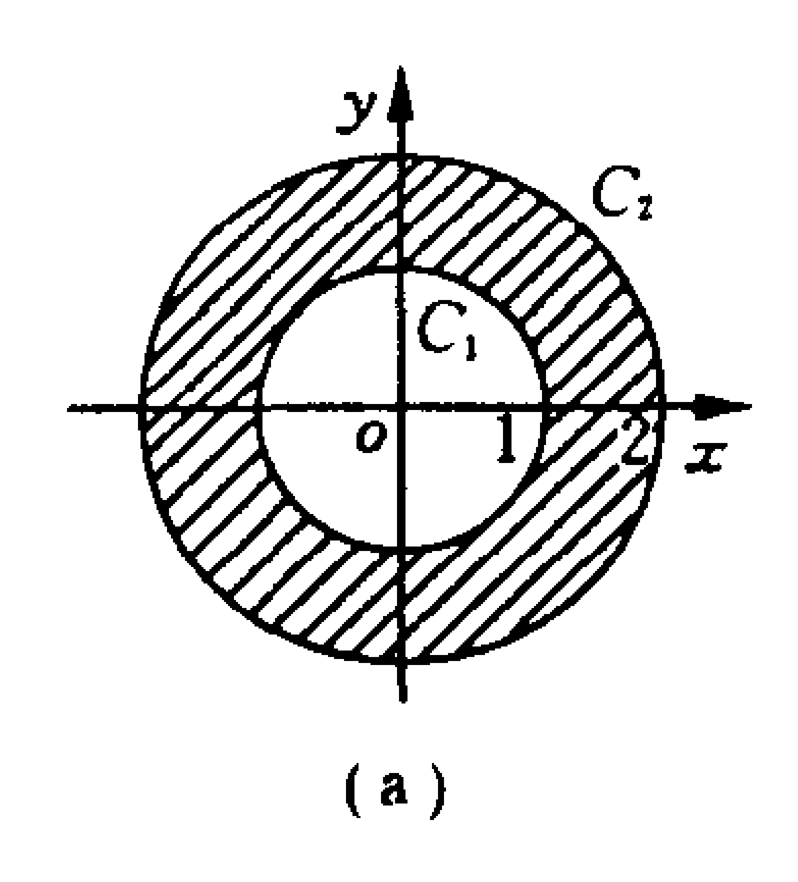
例 18 计算积分 $\int_C\frac{e^z}{z}dz$, C 为圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 组成.

解法 1 C_1 与 C_2 围成一个圆环域,如图 3.15(a)所示,$\frac{e^z}{z}$ 在圆环域内及其边界上处处解析. 由复合闭路定理,有

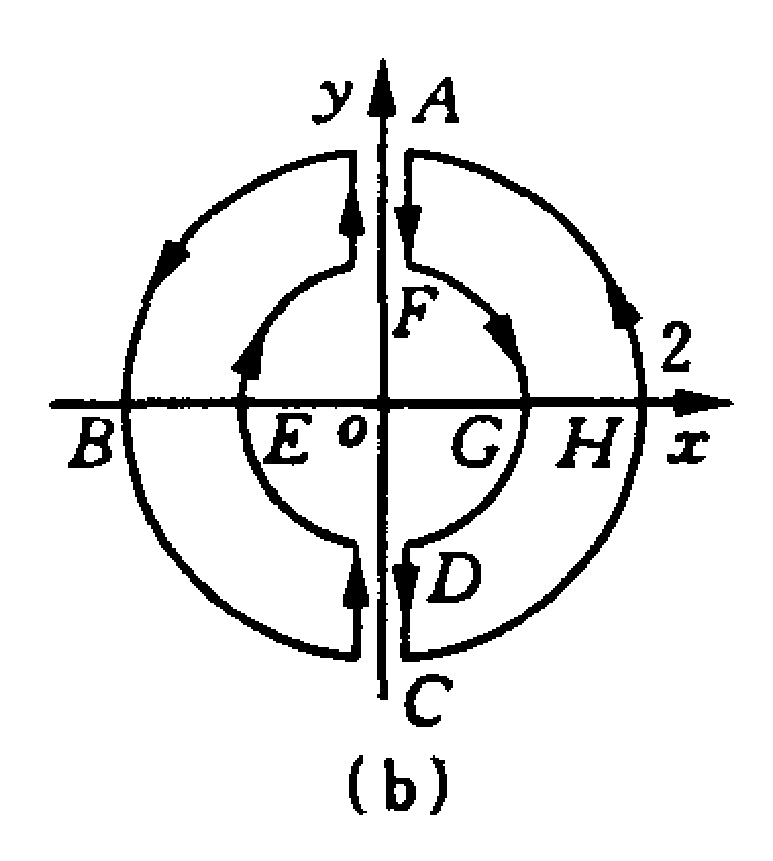
$$\int_C\frac{e^z}{z}dz=0.$$

解法 2 作两条简单闭曲线 Γ_1 和 Γ_2，如图 3.15(b) 所示，Γ_1：$ABCDEFA$，Γ_2：$AFGDCHA$. 所以

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z}dz.$$



(a)



(b)

图 3.15

而函数$\frac{e^z}{z}$在 Γ_1,Γ_2 内和 Γ_1,Γ_2 上解析，所以

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz = 0.$$

例 19 利用复合闭路定理，证明：

$$\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx = \int_0^{\infty}\sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

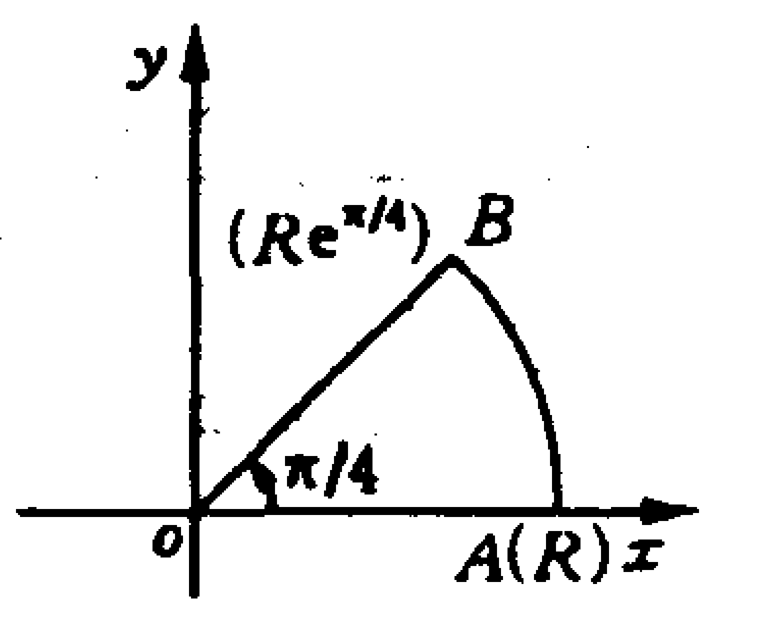


图 3.16

证 因为 e^{-z^2} 在图 3.16 所示区域内解析，所以

$$\int_{OABO} e^{-z^2}dz = 0.$$

在弧$\widehat{AB}$上，$z = Re^{i\theta}\left(0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$，在$\overline{oB}$上，$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t\ (0 \leqslant t \leqslant R)$. 于是有

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} iRe^{i\theta}d\theta + \int_R^0 \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-it^2}dt = 0.$$

而 $\left|\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} iRe^{i\theta}d\theta\right|$

$$\leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta}d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-2R^2\varphi/\pi}d\varphi \quad \left(当\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时, \sin\varphi \geqslant \frac{2\varphi}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \quad (R \to \infty),$$

因为$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 0$，令积分式趋向 ∞，有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\infty}\cos(t^2)dt - i\int_0^{\infty}\sin(t^2)dt\right] = 0,$$

即
$$\int_0^{\infty}\cos(t^2)dt - i\int_0^{\infty}\sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$

比较等式两边的虚部与实部，即得

$$\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx = \int_0^{\infty}\sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

图 3.17

例 20 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{z-2-i}$，积分路线如图 3.17 所示.

解 $z = 2 + i$ 为被积函数的奇点，作 C_1 在 C 内且包含点 $2 + i$，故依复合闭合原理，有

$$\oint_C \frac{dz}{z-2-i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i.$$

例 21 利用 $\oint_C \frac{dz}{z+2} = 0, C: |z| = 1$，证明：

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0.$$

证 因为函数$\frac{1}{z+2}$在 $|z| \leqslant 1$ 内解析，所以 $\oint_C \frac{dz}{z+2} = 0$.
又 $C: z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, dz = ie^{i\theta}d\theta$，故

$$\oint_C \frac{dz}{z+2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + 2 + i\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)(\cos\theta+2-\mathrm{i}\sin\theta)}{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\text{(有理化)}$$

$$=-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\mathrm{i}\int_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$$

与 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z+2}=0$ 比较，得

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0.$$

例 22 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有限个点 $z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 外处处解析，且在 D_0+C 上连续（C 是 D 的边界，D_0 是 D 去掉 z_i 后的集合）. 如果有 $\lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)=0\ (i=1,2,\cdots,N)$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

证 作 $C_i(i=1,2,\cdots,N)$ 互不相交，互不包含，且均在 C 内，分别包围 z_i. 则依复合闭路原理，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}f(z)\mathrm{d}z\quad(C_i:|z-z_i|=r_i).$$

因此只需证明 $\int_{C_i}f(z)\mathrm{d}z=0$，命题即成立.

由于 $\lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)=0\ (i=1,2,\cdots,N)$，因此对任给 $\varepsilon_i>0$，总存在 $\delta_i>0$，使得当 $0<|z-z_i|<\delta_i$，就有 $|z-z_i||f(z)|<\varepsilon_i$. 即

$$|f(z)|<\frac{\varepsilon_i}{|z-z_i|},\quad 0<|z-z_i|<\delta_i,\ i=1,2,\cdots,N.$$

取 r_i 使其充分小，当 $0<r_i<\delta_i(i=1,2,\cdots,N)$ 时，C_i 完全落在 $0<|z-z_i|<\delta_i$ 内，从而在 C_i 上处处有

$$|f(z)|<\frac{\varepsilon_i}{|z-z_i|}\ (i=1,2,\cdots,N).$$

所以 $\left|\int_{C_i}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{C_i}|f(z)||\mathrm{d}z|\leqslant\varepsilon_i\int_{C_i}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-z_i|}=2\pi\varepsilon_i.$

由于 ε_i 的任意性，因而有

$$\int_{C_i} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

即证得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

本例是柯西 - 古萨定理的一种推广，即 $f(z)$ 在 C 内有有限个奇点 z_i 时，只要有 $\lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)=0$，则仍然有 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

例 23（关于含有无穷远点区域的柯西 - 古萨定理） 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$，则对于任何 $R>r_0$，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = A,$$

其中 C 为 $|z-z_0|=R$ 正向.

证 取 R_0 并使之充分大，即 $R_0>|z_0|+R$，令 Γ 为 $|z|=R_0$，则 $f(z)$ 在以 C 为内边界，Γ 为外边界的区域上解析，依复合闭路定理，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

因为积分与 R 无关，故

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R_0\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z.$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - A = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{A}{z}\mathrm{d}z,$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{zf(z)-A}{z}\mathrm{d}z.$$

因为 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$，故对任意 $\varepsilon>0$，有 $\mathscr{R}>0$，使当 $R_0>\mathscr{R}$ 时，有 $|zf(z)-A|<\varepsilon$. 所以，当 $R_0<\mathscr{R}$ 时，有

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - A\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{|zf(z)-A|}{|z|}|\mathrm{d}z|$$

$$< \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{R_0} 2\pi R_0 = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{R_0 \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = A$. 命题得证.

第三节　原函数与不定积分

主要内容

1. 定理 1　如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，则积分 $\int_C f(z) dz$ 与连接起点与终点的路线 C 无关.

即若 $f(z)$ 在 B 内解析，z_0, z_1 为 B 内两点，C_1, C_2 为 B 内连结 z_0, z_1 的曲线，则

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz.$$

2. 定理 2　如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$ 必为 B 内的一个解析函数，且有 $F'(z) = f(z)$.

与微积分中对变上限积分求导的定理类似.

3. 如果函数 $\varphi(z)$ 在区域 B 内的导数等于 $f(z)$，则称 $\varphi(z)$ 是 $f(z)$ 在 B 内的一个原函数.

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

$f(z)$ 的全体原函数 $F(z) + C$ 称为 $f(z)$ 的不定积分，即

$$\int f(z) dz = F(z) + C.$$

4. 牛顿 - 莱布尼茨公式

如果 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，$F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_2),$$

其中 z_0, z_1 是 B 内两点.

5. 莫瑞拉(Morera)定理

设在复平面上的单连通域 B 内，函数 $f(z)$ 连续. 若在 B 内任意一条闭曲线 C 上都有 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，则 $f(z)$ 是 B 内的解析函数.

莫瑞拉定理的关键是，在 B 内的闭曲线是任意一条而不是某一条.

由此得出：若函数 $f(z)$ 在单连通域 B 上连续，则

$$f(z) \text{ 在 } B \text{ 内解析} \Longleftrightarrow \int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

疑 难 解 析

1. 复变函数积分的牛顿-莱布尼茨公式与实一元函数的牛顿-莱布尼茨公式有何不同?

答 两者在形式和结果上几乎完全一致，但实一元函数积分对函数的要求比复变函数积分对函数的要求低得多. 对实一元函数 $f(x)$ 而言，只要 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就存在，就有牛顿-莱布尼茨公式成立，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

而对复变函数来说，$f(z)$ 连续，积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，不一定有牛顿-莱布尼茨公式成立. 因为复变函数积分实际上是线积分，所以牛顿-莱布尼茨公式成立与沿闭曲线的复变函数积分为零联系在一

起，于是要求 $f(z)$ 必须在单连通域 B 内处处解析，才有

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0).$$

2. 复变函数的积分法中是否有与实一元函数积分类似的分部积分公式？在什么条件下可以使用？

答　复变函数的积分中也有与实一元函数定积分类似的分部积分公式. 即：

若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，z_0 与 z_1 为 B 内两个定点，则因为 $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$，所以 $f(z)g(z)$ 是 $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ 的原函数. 而 $f'(z)$，$g'(z)$ 仍为解析函数(见下节). 所以由

$$\int_{z_0}^{z_1}[f'(z)g(z) + f(z)g'(z)]\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

得
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\mathrm{d}z.$$

上式即复积分的分部积分公式.

例如：计算 $\int_1^{1+i} z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$.

因为 z 和 e^z(视作 e^z 的原函数)在包含 1 和 $1+i$ 的单连通域 B 内连续，所以可使用分部积分公式. 于是

$$\int_1^{1+i} z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z = z\mathrm{e}^z\Big|_1^{1+i} - \int_1^{1+i}\mathrm{e}^z\mathrm{d}z = (z-1)\mathrm{e}^z\Big|_1^{1+i}$$
$$= i\mathrm{e}^{1+i} = i\mathrm{e}(\cos 1 + i\sin 1).$$

方法、技巧与典型例题分析

用牛顿-莱布尼茨公式计算积分，首先要解决的是，积分上、下限的两点是否可以包含在一个单连通域内，且被积函数 $f(z)$ 是否在该单连通域内解析. 其次，要易于求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$，这可以利用微积分中的知识.

例 1 证明：

$$\operatorname{Arctan} z=\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}.$$

证 取 D 为全平面除去虚轴上两条射线 $(i,i\infty)$ 和 $(-i\infty,i)$ 后的区域. 取函数

$$\operatorname{Arctan} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

当 $z=0$ 时，有

$$(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}\quad(\arctan x=0).$$

而
$$\left(\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}\right)'=\frac{1}{1+z^2},\quad 且\quad \int_0^0 \frac{dz}{1+z^2}=0.$$

所以在 D 内，$\arctan z=\int_0^z \frac{1}{1+z^2}dz$.

若取 D 为除去点 $z=\pm i$ 后的全平面，则因为

$$\operatorname{Arctan} z=\arctan z+2k\pi,\ k\ 为整数,$$

当积分线路绕 $-i$ 一周时，有

$$\int_{|z+i|=\varepsilon<1}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\int_{|z+i|=\varepsilon}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=-\pi.$$

当积分线路绕 i 一周时，有

$$\int_{|z+i|=\varepsilon<1}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\int_{|z+i|=\varepsilon}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=\pi.$$

当绕若干周时，就有一般形式

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}=\arctan z-k_1\pi+k_2\pi=\operatorname{Arctan} z.$$

例 2 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz$；　　(2) $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos z^2}dz$；

(3) $\int_1^i (2+iz)^2 dz$；　　(4) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)}dz$.

解 (1) 因为 $z\cos z^2 dz=\frac{1}{2}\cos z^2 dz^2=\frac{1}{2}d\sin z^2$，故由 $z\cos z^2$

在复平面上处处解析，得

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} d\sin z^2 = \frac{1}{2}\sin z^2 \Big|_0^{\pi i}$$

$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin(\pi^2).$$

(2) 因为$\frac{1+\tan z}{\cos z^2}dz = (1+\tan z)d\tan z = \tan z + \frac{1}{2}\tan^2 z.$

而$\frac{1+\tan z}{\cos z^2}$在圆周$|z| < \frac{\pi}{2}$内处处解析，连接1与i的线段在圆周$|z| < \frac{\pi}{2}$内，所以

$$\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz = \int_1^i (1+\tan z)d\tan z = \left(\tan z + \frac{1}{2}\tan^2 z\right)\Big|_1^i$$

$$= \tan i + \frac{1}{2}\tan^2 i - \tan 1 - \frac{1}{2}\tan^2 1$$

$$= i\frac{\text{sh}1}{\text{ch}1} - \frac{1}{2}\frac{\text{sh}^2 1}{\text{ch}^2 1} - \tan 1 - \frac{1}{2}\tan^2 1$$

$$= -\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\tan^2 1 + \frac{1}{2}\frac{\text{sh}^2 1}{\text{ch}^2 1}\right) + i\,\text{th}1.$$

(3) 因为$(2+iz)^2$在全平面解析，所以

$$\int_1^i (2+iz)^2 dz = \int_1^i (4+4iz-z^2)dz = \left[4z+2iz^2-\frac{1}{3}z^3\right]\Big|_1^i$$

$$= \left(4i-2i+\frac{i}{3}\right) - \left(4+2i-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{11}{3} + \frac{i}{3}.$$

(4) 因为

$$\frac{\ln(1+z)}{1+z}dz = \ln(1+z)d[\ln(1+z)]$$

$$= d\left[\frac{1}{2}\ln^2(1+z)\right],$$

而$\frac{\ln(1+z)}{1+z}$在区域$-\pi < \arg(z+1) < \pi$内解析，故

$$\int_1^i \frac{\ln(1+z)}{1+z}dz = \frac{1}{2}\ln^2(1+z)\Big|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4}\right)\right]^2 - \ln^2 2$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\ln^2 2\right) + \frac{i}{8}\pi\ln 2.$$

例 3 计算积分$\int_C (2z^2 + 8z + 1)dz$的值，C是由 0 到 $2\pi a$ 的摆线：$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$.

解 若用复积分计算，将比较麻烦. 但由于被积函数 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 在复平面上处处解析，从而积分与路径无关，可应用牛顿 - 莱布尼茨公式计算.

$$\int_C (2z^2 + 8z + 1)dz = \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1)dz$$

$$= \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right)\Big|_0^{2\pi a}$$

$$= \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$$

例 4 计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz$； (2) $\int_{\pi i/6}^{0} \mathrm{ch}3z dz$； (3) $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$.

解 (1) e^{2z} 在复平面上处处解析，故

$$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz = \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2}e^{6\pi i} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i} = 0.$$

(2) $\mathrm{ch}3z$ 在全平面处处解析，$\mathrm{ch}3z dz = \frac{1}{3}\mathrm{sh}3z$，所以

$$\int_{\pi i/6}^{0} \mathrm{ch}3z dz = \frac{1}{3}\mathrm{sh}3z\Big|_{\pi i/6}^{0} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{sh}0 - \mathrm{sh}\,\frac{\pi i}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\frac{\pi i}{2} = -\frac{i}{3}.$$

(3) 因为$\sin^2 z dz = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)dz = d\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin 2z\right)$，而 $\sin^2 z$ 在复平面上处处解析，故

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\sin 2z\right)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = \pi i - \frac{1}{2}\sin(2\pi i)$$

$$= \left(\pi - \frac{1}{2}\mathrm{sh}2\pi\right)i.$$

例 5 用分部积分法计算下列积分：

(1) $\int_{1}^{1+i} ze^{2z}dz$； (2) $\int_{0}^{1} z\sin z dz$； (3) $\int_{0}^{i}(z-1)e^{-z}dz$.

解 (1) 因为 ze^{2z} 在复平面上处处解析，而

$$ze^{2z}dz = \frac{z}{2}de^{2z},$$

所以

$$\int_{1}^{1+i} ze^{2z}dz = \frac{z}{2}e^{2z}\Big|_{1}^{1+i} - \frac{1}{2}\int_{1}^{1+i} e^{2z}dz$$

$$= \frac{1+i}{2}e^{2(1+i)} - \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{4}e^{2z}\Big|_{1}^{1+i}$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}\right)e^{2(1+i)} - \frac{1}{4}e^{2}.$$

(2) 因为 $z\sin z$ 在复平面上处处解析，而

$$z\sin z dz = zd(-\cos z),$$

所以

$$\int_{0}^{1} z\sin z dz = -z\cos z\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\cos z dz$$

$$= (-z\cos z - \sin z)\Big|_{0}^{1} = \sin 1 - \cos 1.$$

(3) 因为 $(z-1)e^{-z}$ 在复平面上处处解析，而

$$(z-1)e^{-z}dz = (1-z)de^{-z},$$

所以

$$\int_{0}^{i}(z-1)e^{-z}dz = (1-z)e^{-z}\Big|_{0}^{i} + \int_{0}^{i}e^{-z}dz$$

$$= (1-z-1)e^{-z}\Big|_{0}^{i} = -ie^{-i}$$

$$= -\sin 1 - i\cos 1.$$

第四节 柯西积分公式与高阶导数公式

主 要 内 容

1. 柯西积分公式

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任何一条正向简单

闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内的任一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

如果把条件改变为 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 及 C 上都解析，公式将仍然成立.

如果 C 是圆周 $z=z_0+Re^{i\theta}$，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta,$$

即，一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

2. 高阶导数公式

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 C 为函数 $f(z)$ 在其解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部完全含于 D.

高阶导数公式的作用，主要不是通过积分来求导，而是通过求导数来求积分，即

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

3. 柯西不等式

设函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心、R 为半径的圆内解析，在 C 上连续，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{M}{R^n}n!,$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的最大值.

当 $n=0$ 时，有 $|f(z_0)|\leqslant M$.

4. 刘维尔(Liouville) 定理

设函数 $f(z)$ 在全平面上解析，且有 $|f(z)|\leqslant M$，则 $f(z)$ 为常数.

5. 代数基本定理

设 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n, n\geqslant 1, a_n\neq 0$，则 $P(z)$ 在复平面上至少有一个根.

疑难解析

1. 柯西积分公式的意义是什么？柯西积分公式的条件是否可以放宽？

答 在偏微分方程中，常常遇到求解方程的边值问题，例如已知函数 $u(x,y)$ 在某一区域边界上的值，并知其在此区域内满足拉普拉斯方程，则在一定条件下边值问题有惟一解. 显然 $u(x,y)$ 为一调和函数（见下节），可以由调和函数在区域边界上的值来确定其在区域内部的值. 调和函数是解析函数的实部，因此自然会有问题：解析函数在区域边界上的值是否可以确定其在区域的值呢？柯西积分公式圆满地回答了这个问题，它表示函数 $f(z)$ 在边界上的值完全决定了它在区域 D 内任一点上的值.

柯西积分公式的条件可以适当放宽，放宽后有以下三种形式：

(1) 若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域内及 C 上解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

(2) 若 C_0 的内部为复连通域，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为全部内边界曲线，当 $f(z)$ 在 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 所围区域和 C 上解析时，有

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.\end{aligned}$$

(3) 设 D 为复平面上包含无穷远点的区域. C 为 D 内一条简单闭曲线，函数 $f(z)$ 在 C 外及 C 上解析（除无穷远点），且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A\neq\infty$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+A,\ z\in D.$$

2. 解析函数的高阶导数公式说明解析函数的导数与实一元函数的导数有何不同?

答　解析函数的高阶导数给我们一个利用导数来求积分的公式,使求沿闭曲线的积分更加简捷. 而尤为重要的是,高阶导数公式告诉我们:只要函数 $f(z)$ 在 D 内处处可导(解析),则它的各阶导数在区域 D 内存在(即 $f^{(n)}(z)$ 仍解析). 也就是说,只要 $f(z)$ 在 D 内有一阶导数,必有任意阶导数. 而对实一元函数来讲,若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,则 $f'(x)$ 不一定可导,甚至不连续. 例如,$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(-1,2)$ 内可导,$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续,所以 $f'(x)$ 在 $(-1,2)$ 内不可导. 这就说明解析函数的导数与实一元函数的导数存在根本上不同.

方法、技巧与典型例题分析

一、柯西积分公式及其应用

到此为止,我们已经掌握了关于复积分计算的基本定理与公式. 因此,计算复积分不再是应用某一定理或某一公式,而往往是同时应用几个定理或几个公式,这就要求我们加强对综合问题的分析、研究和求解能力的培养.

当被积函数为有理函数或被积函数可化为分母为多项式的函数时,如果在封闭曲线 C 内含有分母的一个零点而分子在 C 内处处解析(即对 $\oint_C g(z)dz$,$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)}$ 或 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$,$z_0$ 在 C 内,而 $f(z)$ 在 C 内处处解析),则可直接应用柯西积分公式或高阶导数公式来计算积分. 而在有理函数情形,若 C 内含有分母一个以

上的零点而分子解析，则要先将被积函数化为部分分式，然后依据具体问题使用恰当的方法去求积.

例 1 计算下列积分：

(1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=4}\dfrac{\sin 2z}{z}dz$； (2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=5}\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}dz$.

解 (1) 取 $f(z)=\sin 2z, z_0=0$，依柯西积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4}\frac{\sin 2z}{z}dz=\sin 2z\Big|_{z=0}=0.$$

(2) 由分解部分分式，有 $\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{2}{z-3}$，所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5}\frac{3z-1}{z^2-2z-3}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5}\frac{2}{z-3}dz.\end{aligned}$$

右边第一个积分取 $f(z)=1, z_0=-1$；第二个积分取 $f(z)=2, z_0=3$. 于是，依柯西积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5}\frac{3z-1}{z^2-2z-3}dz=1+2=3.$$

在后面的例题中，一般不再列出 $f(z)$ 和 z_0 的值，请读者自己注意观察.

例 2 计算函数 $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ 沿正向圆周 $C: |z-z_0|=1$ 的积分值. 设圆周 C 的圆心分别在：(1) $z_0=1$；(2) $z_0=\dfrac{1}{2}$；(3) $z_0=-1$；(4) $z_0=-i$（见图 3.18).

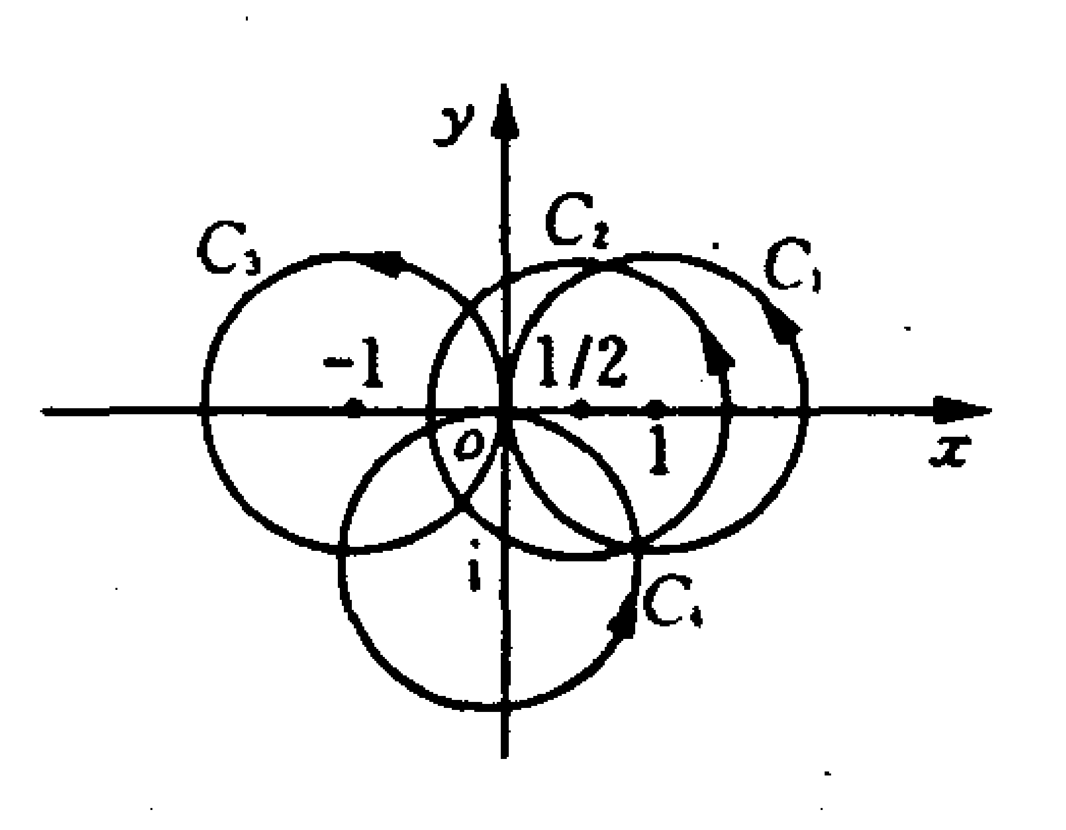


图 3.18

解 为了求积分的值，将柯西积分公式变形为

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

(1) $z_0=1, g(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{z^2+1}{z+1}$,则

$$\int_C\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\oint_{C_1}\frac{z^2+1}{z+1}\cdot\frac{dz}{z-1}$$

$$=2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z+1}\right]_{z=1}=2\pi i\cdot\frac{2}{2}=2\pi i.$$

(2) 因为$\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$在C_2上没有不解析点,C_2可以由C_1平移(看作连续变形)而得,所以

$$\int_C\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\oint_{C_2}\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=2\pi i.$$

(3) $z_0=-1, g(z)=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{z^2+1}{z-1}$,则

$$\int_C\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\oint_{C_3}\frac{z^2+1}{z-1}\cdot\frac{dz}{z+1}=2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z-1}\right]_{z=-1}$$

$$=2\pi i\cdot\left(-\frac{2}{2}\right)=-2\pi i.$$

(4) $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$在C_4内处处解析,由柯西-古萨定理,有

$$\int_C\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\oint_{C_4}\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=0.$$

例3 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz, C: |z|=\frac{1}{4}, |z|=2, \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$, $|z+1|=\dfrac{1}{4}$;

(2) $\displaystyle\oint_C\frac{2z+3}{z(z^2+1)}dz, C: \left|z-\frac{i}{2}\right|=1.$

解 (1) $\dfrac{e^{2z}}{z^2+z}$有两个奇点$z_1=0, z_2=-1$.

当C_1为$|z|=\dfrac{1}{4}$时,C_1内有奇点$z_1=0$,故

$$\oint_{C_1}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz=\oint_{C_1}\frac{e^{2z}}{z+1}\cdot\frac{dz}{z}=2\pi i\left[\frac{e^{2z}}{z+1}\right]_{z=0}=2\pi i;$$

当 C_2 为 $|z|=2$ 时，由复合闭路定理，有

$$\oint_{C_2}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz=\oint_{C_1}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz+\oint_{C_4}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz$$

$$=2\pi i-2\pi i e^{-2}=2\pi i(1-e^{-2});$$

当 C_3 为 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$ 时，函数在 C_3 内解析，故

$$\oint_{C_3}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz=0;$$

当 C_4 为 $|z+1|=\frac{1}{4}$ 时，C_4 内有奇点 $z=-1$，故

$$\oint_{C_4}\frac{e^{2z}}{z^2+z}dz=\oint_{C_4}\frac{e^{2z}}{z}\cdot\frac{dz}{z+1}=2\pi i\left[\frac{e^{2z}}{z}\right]_{z=-1}=-2e^{-2}\pi i.$$

(2) $\frac{2z+3}{z(z^2+1)}$ 有三个奇点，$z_1=0,z_2=-i,z_3=i$. 而

$$\frac{2z+3}{z(z^2+1)}=\frac{3}{z}+\frac{i-3/2}{z+i}-\frac{i+3/2}{z-i},$$

所以

$$\oint_C\frac{2z+3}{z(z^2+1)}dz=\oint_C\frac{3}{z}dz+\oint_C\frac{i-3/2}{z+i}dz-\oint_C\frac{i+3/2}{z-i}dz$$

$$=2\pi i\cdot 3+0-2\pi i\left(i+\frac{3}{2}\right)=2\pi i\left(\frac{3}{2}-i\right).$$

例 4 计算 $\oint_C\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$，$C$ 分别为：

(1) $|z-1|=\frac{1}{2}$； (2) $|z+1|=\frac{1}{2}$； (3) $|z|=2$.

解 被积函数 $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}$ 有两个奇点 $z=\pm 1$.

(1) 在 $|z-1|=\frac{1}{2}$ 内有奇点 $z=1$，故

$$\oint_C\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz=\oint_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\cdot\frac{dz}{z-1}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right]_{z=1} = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

（2）在 $|z+1| = \frac{1}{2}$ 内有奇点 $z=-1$，故

$$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint_{C_2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\cdot\frac{dz}{z+1} = 2\pi i\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right]_{z=-1}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

（3）由复合闭路定理，有

$$\oint_{C_3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i = \sqrt{2}\pi i.$$

例 5 计算 $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$，$C: x^2+y^2=2x$.

解 $z^4+1=0$ 有四个根 $z_k = e^{i(\pi/4+2\pi)}$，$k=0,1,2,3$，但仅 $e^{i\pi/4}$ 和 $e^{-i\pi/4}$ 在 C 内. 作 C_1, C_2 在 C 内互不相交，互不包含，分别包围 $e^{i\pi/4}$ 和 $e^{-\pi/4}$，所以

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^4+1} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^4+1}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{z-e^{i\pi/4}}{1+z^4}\cdot\frac{dz}{z-e^{i\pi/4}} + \oint_{C_2} \frac{z-e^{-i\pi/4}}{1+z^4}\,\frac{dz}{z-e^{-i\pi/4}}$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[(e^{3i\pi/4})^{-3} + (e^{-3i\pi/4})^{-3}\right]$$

$$= \pi i\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

例 6 设 $f(z) = \int_{|\zeta|=2} \frac{e^{\pi\zeta/3}}{\zeta-z}d\zeta$，求 $f(i)$ 和 $f(-i)$. 当 $|z| >$ z 时，求 $f(z)$.

解 由柯西积分公式，有

$$f(\mathrm{i}) = 2\pi \mathrm{i} e^{\pi \mathrm{i}/3} = \pi(-\sqrt{3} + \mathrm{i}),$$

$$f(-\mathrm{i}) = 2\pi \mathrm{i} e^{-\pi \mathrm{i}/3} = \pi(\sqrt{3} + \mathrm{i}),$$

当 $|z| > 2$ 时，$f(z) = 0$.

例 7 下列推导是否错误？如有错，错在何处？

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)} = \oint_{|z|=3/2} \frac{1}{z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z-1} = 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{1}{z}\right]_{z=1} = 2\pi \mathrm{i}.$$

解 错误. 因为 $z = 0$ 是被积函数奇点，所以第二个等号不成立，应为

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=3/2} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)} &= \oint_{|z|=3/2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z \\ &= \oint_{|z|=3/2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_{|z|=3/2} \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= 2\pi \mathrm{i} - 2\pi \mathrm{i} = 0.\end{aligned}$$

例 8 计算下列积分：

(1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-4)\cos z}$, $C: x^2 + y^2 = 4x$;

(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, $C: |z| = 3$;

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z^2+9}\mathrm{d}z$, $C: |z - 2\mathrm{i}| = 2$.

解 (1) 化 $x^2 + y^2 = 4x$ 为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$，即 $|z-2| = 2$. C 内有奇点 $\frac{\pi}{2}$ 和 2，作以 $\frac{\pi}{2}$ 和 2 为心的位于 C 内的互不相交且互不包含的小圆周 C_1 和 C_2. 依复合闭合定理与柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}I &= \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-4)\cos z} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-4)\cos z} \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z^2-4} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\cos z} + \oint_{C_2} \frac{1}{(z+2)\cos z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z-2} \\ &= 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{1}{z^2-4}\right]_{z=\pi/2} + 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{1}{(z+2)\cos z}\right]_{z=2} \\ &= 2\pi \mathrm{i}\left[\frac{4}{\pi^2-16} + \frac{1}{4\cos 2}\right].\end{aligned}$$

（2）将函数分解为部分分式再应用柯西积分公式，因为被积函数有奇点 0，-1，1 在 C 内，故

$$I=-\oint_C\frac{e^z}{z}dz+\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^z}{z-1}dz+\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^z}{z+1}dz$$
$$=-2\pi i[e^z]_{z=0}+\frac{1}{2}2\pi i[e^z]_{z=1}+\frac{1}{2}2\pi i[e^z]_{z=-1}$$
$$=\pi i(e+e^{-1}-2).$$

（3）函数有两个奇点 $z=\pm 3i$，仅 $z=3i$ 在 C 内，所以

$$\oint_C\frac{\sin z}{z^2+9}dz=\oint_C\frac{\sin z}{z+3i}\cdot\frac{dz}{z-3i}=2\pi i\left[\frac{\sin z}{z+3i}\right]_{z=3i}$$
$$=2\pi i\cdot\frac{\sin 3i}{6i}=\frac{\pi}{3}\sin 3i=\frac{\pi i}{3}\mathrm{sh}3.$$

例 9 设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析，在 $\overline{D}$ 上连续，边界 C 由逐段光滑曲线组成．若 $f(z)$ 在 C 上恒为常数，证明：$f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上也恒为常数．

证 设 $z\in D$，由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\leqslant\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{M}{\zeta-z}d\zeta=M,$$

而 $\overline{D}=D+C$，所以命题成立．

例 10（含无穷远点的柯西积分公式） 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的外部区域 D（含 ∞ 点的区域）解析，在 $D+C$ 上连续，且有 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$．证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & z\in D,\\ A, & z\in C\text{ 内部},\end{cases}$$

其中 C 取正向．

证 在 D 内任取一点 z，并取充分大的 R，作圆 C_R：$|z|=R$，将 C 与 z 包含在内．则 $f(z)$ 在以 C 和 C_R 为边界的区域内解析，依柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right].$$

因为$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$在 $|\zeta| > R$ 上解析，且

$$\lim_{\zeta \to \infty} \zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \to \infty} f(\zeta) \frac{1}{1 - z/\zeta} = \lim_{\zeta \to \infty} f(\zeta) = A,$$

所以，当 z 在 C 外部时，有

$$f(z) = A - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

即
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -f(z) + A.$$

设 z 在 C 内，则 $f(z) = 0$，即

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right],$$

所以
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = A.$$

例 11 计算

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z-2)(z-4)\cdots(z-98)(z-100)}, C: |z| = 99.$$

解 设 $f(z) = 1\Big/\left[\prod_{k=1}^{49}(z - 2k)\right]$，则 $f(z)$ 在域 $|z| \geqslant 99$ 上除 $z = \infty$ 外解析，且 $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$. 由例 10，有

$$f(100) = f(\infty) - I = -I,$$

故
$$I = -f(100) = -1\Big/\left[\prod_{k=1}^{49}(100 - 2k)\right] = -\frac{1}{98!!}.$$

例 12 计算下列积分：

(1) $\oint_C \frac{dz}{z^3 + 1}, C: |z| = 10;$

(2) $\oint_C \frac{3z - 1}{z(z-1)} dz, C: |z| = 2.$

解 可以利用复合闭路定理或柯西积分公式计算积分，但利用例 10 的结果将使计算过程更为简捷.

(1) 将$\frac{1}{z^3 + 1}$化为$\frac{z - 100}{z^3 + 1} \cdot \frac{1}{z - 100}$，则$\frac{z - 100}{z^3 + 1}$在 C 外解

析，于是

$$\oint_C \frac{dz}{z^3+1} = \oint_C \frac{z-100}{z^3+1}\cdot\frac{dz}{z-100}$$

$$= -2\pi i \left.\frac{z-100}{z^3+1}\right|_{z=100} + 2\pi i \lim_{z\to\infty}\frac{z-100}{z^3+1}$$

$$= 0+0=0.$$

（2）将 $\frac{3z-1}{z(z-1)}$ 化为 $\frac{(3z-1)(z-20)}{z(z-1)}\cdot\frac{1}{(z-20)}$，则函数 $\frac{(3z-1)(z-20)}{z(z-1)}$ 在 C 外解析，于是

$$\oint_C \frac{3z-1}{z(z-1)}dz = \oint_C \frac{(3z-1)(z-20)}{z(z-1)}\frac{dz}{z-20}$$

$$= -2\pi i \left.\frac{(3z-1)(z-20)}{z(z-1)}\right|_{z=20}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to\infty}\frac{(3z-1)(z-20)}{z(z-1)}$$

$$= 0+6\pi i = 6\pi i.$$

注意　题(1) 中的 $z_0=100$ 与题(2) 中的 $z_0=2$ 都是随意选取的，只要 z_0 在 C 外即可.

例 13　证明：若 $f(z)$ 在半带形 $x\geqslant x_0, 0\leqslant y\leqslant h$ 连续，且有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+iy)=A\ (0\leqslant y\leqslant h)$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{B_x} f(z)dz = iAh.$$

其中 B_x 是平行 y 轴的直线段 $0\leqslant y\leqslant h$.

证　因为对任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $\mathscr{X}$. 当 $x_0>\mathscr{X}$ 时，恒有

$$|f(x+iy)-A|<\varepsilon,\ 0\leqslant y\leqslant h,$$

所以
$$\left|\int_{B_x} f(z)dz - iAh\right| = \left|\int_{B_x}(f(z)-A)|d|\right|$$

$$\leqslant \int_0^h |f(x+iy)-A|dy \leqslant h\varepsilon,$$

于是
$$\lim_{x\to+\infty}\int_{B_x} f(z)dz = iAh.$$

例 14 证明：

(1) 若函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内连续，则

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 2\pi f(0);$$

(2) 若 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域内连续，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a).$$

证 (1) 由连续性知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使当 $0\leqslant r<\delta$ 时，恒有 $|f(re^{i\theta}-f(0)|<0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 故

$$\left|\int_0^{2\pi}[f(re^{i\theta}-f(0)]d\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})-f(0)|d\theta\leqslant 2\pi\varepsilon,$$

即
$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}[f(re^{i\theta}-f(0)]d\theta = 0.$$

故命题 $\lim\limits_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 2\pi f(0)$ 成立.

(2) 类似于题(1)，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0\leqslant r<\delta$ 时，有

$$|f(a+re^{i\theta})-f(a)|<\varepsilon,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

故
$$\begin{aligned}&\left|\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz-2\pi i f(a)\right|\\ &=|2\pi i|\left|\oint_{|z-a|=r}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|\\ &\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{|f(a+re^{i\theta}-f(a)|}{re^{i\theta}}|re^{i\theta}|d\theta\leqslant 2\pi\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a).$$

例 15 计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{|dz|}{|z-1|^2}$.

解 因为 $|z|=2, z=2e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, dz=2ie^{i\theta}d\theta, |dz|=2d\theta=-i2\frac{2ie^{i\theta}d\theta}{2e^{i\theta}}=-i2\frac{dz}{z}$，所以

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{-i2}{(z-1)(\bar{z}-1)}\frac{dz}{z}=2i\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-5z+4}$$

$$=\frac{2i}{3}\left[\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z-4}-\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z-1}\right]=\frac{2}{3}i\cdot(0-2\pi i)=\frac{4}{3}\pi.$$

例 16 证明：若 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，积分为正方向，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}\overline{f(0)}, & |z|\leqslant 1,\\ \overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, & |z|>1.\end{cases}$$

证 当 $|\zeta|=1$ 时，$\zeta=e^{i\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\bar\zeta=e^{-i\theta},d\zeta=ie^{i\theta}d\theta$，$\overline{d\zeta}=-ie^{-i\theta}d\theta.\ d\zeta=ie^{i\theta}d\theta=\dfrac{ie^{-i\theta}}{e^{-2i\theta}}d\theta=\dfrac{-\overline{d\zeta}}{\bar\zeta^2}$. 又 $\zeta\cdot\bar\zeta=|\zeta|^2=1$，

于是
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}\left(\frac{\overline{d\zeta}}{\bar\zeta^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}\,\overline{d\zeta}}{\bar\zeta\,(1-z\bar\zeta)}$$
$$=\overline{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(1-\bar z\,\zeta)}}.$$

依柯西积分公式，当 $|z|<1$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(1-\bar z\,\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar z\,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-0}$$
$$=\frac{f(\zeta)}{1-\bar z\,\zeta}\Big|_{\zeta=0}=f(0),$$

故
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\overline{f(0)}\quad(|z|<1).$$

当 $|z|>1$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(1-\bar z\,\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta-1/\bar z}\right)f(\zeta)d\zeta$$
$$=f(0)-f\left(\frac{1}{\bar z}\right),$$

故
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\quad(|z|>1).$$

至此，命题得证.

二、高阶导数公式及其应用

例 17 计算积分 $\oint_C\dfrac{\cos z}{z(z-\pi/2)^3}dz$，$C$ 为以下曲线：

(1) $|z|=\frac{1}{4}$;　　(2) $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{1}{4}$;　　(3) $|z|=2$.

解　$f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z-\pi/2)^3}$只有两个奇点$z_1=0,z_2=\dfrac{\pi}{2}$,所以

(1) 在C内只有一个奇点$z_1=0$,故由柯西积分公式,有

$$I=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{(z-\pi/2)^3}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\cos z}{(z-\pi/2)^3}\right]_{z=0}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(-\pi/2)^3}=2\pi\mathrm{i}\frac{-8}{\pi^3}=-\frac{16}{\pi^2}\mathrm{i}.$$

(2) $f(z)$在C_2内只有一个奇点$z_2=\dfrac{\pi}{2}$,依高阶导数公式,有

$$I=\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z}\frac{\mathrm{d}z}{(z-\pi/2)^3}=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\cos z}{z}\right)''\right]_{z=\pi/2}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\left(\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right)'\right]_{z=\pi/2}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{-z^2\cos z+2z\sin z+2\cos z}{z^3}\right]_{z=\pi/2}$$

$$=\pi\mathrm{i}\frac{\pi}{(\pi/2)^3}=\frac{8}{\pi}\mathrm{i}.$$

(3) 由复合闭路定理与题(1)、题(2)结果,有

$$I=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{(z-\pi/2)^3}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z}\frac{\mathrm{d}z}{(z-\pi/2)^3}$$

$$=-\frac{16}{\pi^2}\mathrm{i}+\frac{8}{\pi}\mathrm{i}=\left(\frac{8}{\pi}-\frac{16}{\pi^2}\right)\mathrm{i}.$$

例18　计算积分$\oint_C\dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-2)}$,$C:|z|=r,r\neq1,2$.

解　(1) 当$0<r<1$时,从被积函数分解出$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$,则$f(z)$在$0<r<1$时解析.于是

$$I=\oint_C f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^3}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right]''_{z=0}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{(6z^2-z+1)}{(z^2-z-2)^3}\right]_{z=0}=\pi\mathrm{i}\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}.$$

(2) 当$1<r<2$时,C内有两个奇点,依复合闭路定理(见图

3.19(a)),有

$$I=\oint_{C_1}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}+\oint_{C_2}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)},$$

再依高阶导数公式,有

$$I=\oint_{C_1}\frac{1}{(z+1)(z-2)}\frac{dz}{z^3}+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z-2)}\frac{dz}{z+1}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right]''_{z=0}+2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1}$$

$$=-\frac{3}{4}\pi i+\frac{2}{3}\pi i=-\frac{1}{12}\pi i.$$

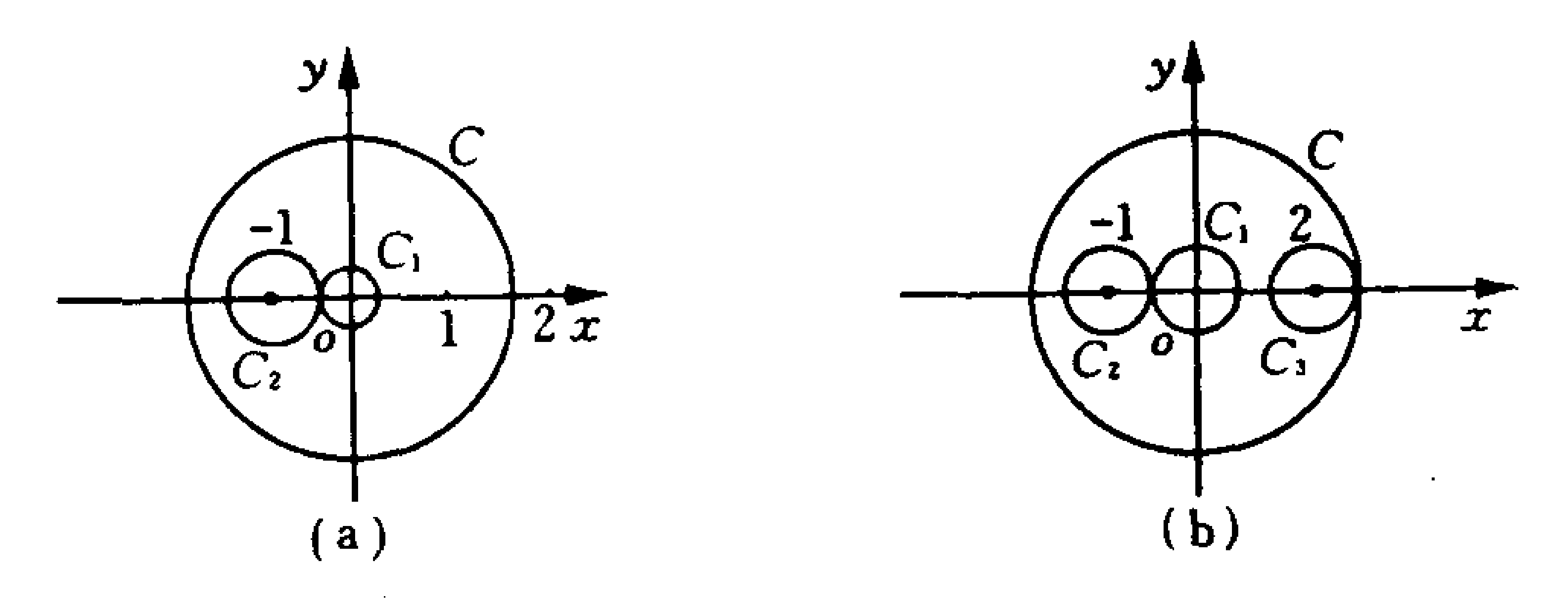


图 3.19

(3) 当 $r>2$ 时,C 内有三个奇点 0, -1,2,依复合闭路定理(见图 3.19.(b)),有

$$I=\oint_{C_1}\frac{1}{(z+1)(z-2)}\frac{dz}{z^3}+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z-2)}\frac{dz}{z+1}$$

$$+\oint_{C_3}\frac{1}{z^3(z+1)}\frac{dz}{z-2}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right]''_{z=0}+2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1}$$

$$+2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=2}$$

$$=-\frac{3}{4}\pi i+\frac{2}{3}\pi i+\frac{1}{12}\pi i=0.$$

例 19 计算下列积分的值.C 为由 $x=\pm 2$ 和 $y=\pm 2$ 所围矩形边界正向(见图 3.20).

(1) $\oint_C \frac{e^z dz}{(z+\pi i/2)^2}$;

(2) $\oint_C \frac{\cos z}{z^3} dz$;

(3) $\oint_C \frac{\tan z/2 dz}{(z-x_0)^2}, |x_0| < 2$;

(4) $\oint_C \frac{\operatorname{sh} 2z dz}{z^4}$.

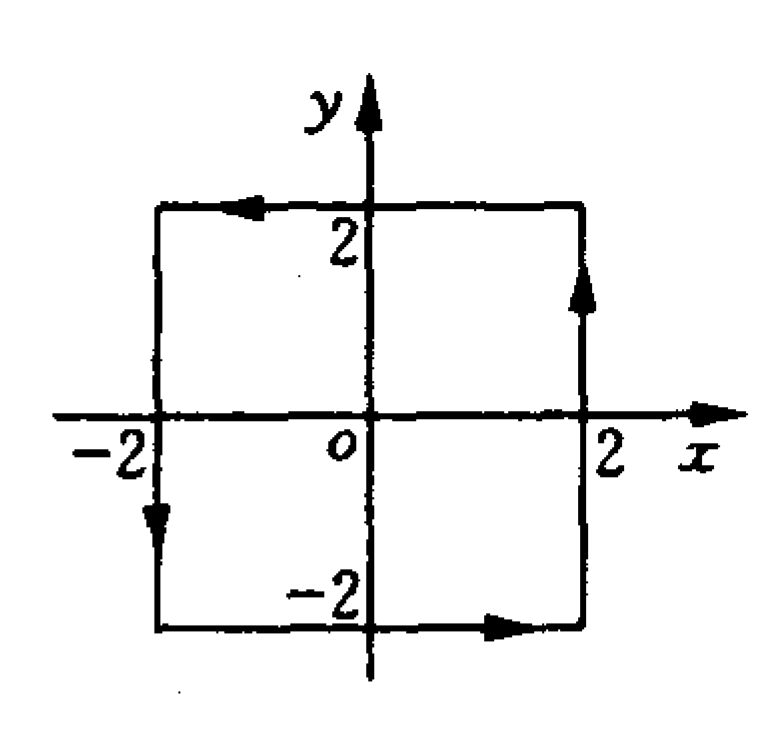


图 3.20

解 (1) C 内有奇点 $z = -\pi i/2$，故

$$I = \oint_C e^z \frac{dz}{(z+\pi i/2)^2} = 2\pi i[e^z]'_{z=-\pi i/2}$$

$$= 2\pi i e^{-\pi i/2} = 2\pi i(-i) = 2\pi.$$

(2) C 内有奇点 $z = 0$，故

$$I = \oint_C \cos z \frac{dz}{z^3} = \frac{2}{2!}\pi i(\cos z)''_{z=0} = \pi i(-\cos 0) = -\pi i.$$

(3) C 内有奇点 $z = x_0$，故

$$I = \oint_C \tan\frac{z}{2} \frac{dz}{(z-x_0)^2} = 2\pi i\left[\tan\frac{z}{2}\right]'_{z=x_0}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2}\sec^2\frac{z}{2}\bigg|_{z=x_0} = \pi i \sec^2\frac{x_0}{2}.$$

(4) C 内有奇点 $z = 0$，故

$$I = \oint_C \operatorname{sh} 2z \frac{dz}{z^4} = 2\pi i \cdot \frac{1}{3!}[\operatorname{sh} 2z]'''_{z=0} = \frac{8}{3}\pi i \operatorname{ch} 0 = \frac{8}{3}\pi i.$$

例 20 计算 $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^3(z-1)^2} dz$，$C$ 为 $|z| = 4$.

解 $f(z)$ 奇点为 0，1，作 C_1 和 C_2 互不相交，互不包含，分别包围奇点 $z = 0$ 和 $z = 1$，且全在 C 内，则依复合闭路定理，有

$$I = \oint_{C_1} \frac{\cos \pi z}{z^3(z-1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\cos \pi z}{z^3(z-1)^2} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\cos \pi z}{(z-1)^2} \frac{dz}{z^3} + \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3} \frac{dz}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{\pi \cos z}{(z-1)^2}\right]''_{z=0} + 2\pi i\left[\frac{\cos \pi z}{z^2}\right]'_{z=1}$$

$$= \pi i\left[\frac{-\pi^2\cos\pi z}{(z-1)^2} + \frac{4\pi\sin\pi z}{(z-1)^3} + \frac{6\cos\pi z}{(z-1)^4}\right]_{z=0} + 2\pi i \cdot 3$$

$$= (6-\pi)\pi i + 6\pi i = (12-\pi)\pi i.$$

例 21 证明:若 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析,且 $|f(z)| < \frac{1}{1-|z|}$,则

$$|f^{(n)}(0)| < e(n+1)!, \quad n = 1,2,\cdots.$$

证 取 C 为 $|z| = \frac{n}{n+1}$,所以 $f(z)$ 在 C 上及 C 内解析,由高阶导数公式

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi!}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,$$

所以

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\frac{1/\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} 2\pi \frac{n}{n+1}$$

$$= (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!.$$

也可由柯西不等式(见下例)直接得出.

例 22(柯西不等式) 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 上解析,且 $|f(z)| \leqslant M$,则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

证 由高阶导数公式,取 $z = z_0$,对任意的 $R_1 < R$,有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,$$

所以

$$|f^{(n)}z_0| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R_1^{n+1}}2\pi R_1 = \frac{Mn!}{R_1^n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

取极限 $R_1 \to R$,即证得命题.

例 23 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ $(R > 1)$ 解析,且 $f(0) = 1$,计算

积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z},\quad C: |z|=1.$$

并利用积分证明：

(1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2+f'(0)$；

(2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2-f'(0)$；

(3) 若有 $\mathrm{Re}[f(z)]>0$，则 $|\mathrm{Re}[f'(z)]|\leqslant 2$.

证 由柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}2f(z)\frac{dz}{z}\pm\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}(z^2+1)f(z)\frac{dz}{z^2}\\&=\frac{1}{2\pi i}2\cdot 2\pi i[f(z)]_{z=0}\pm\frac{2\pi i}{2\pi i}[(z^2+1)f(z)]'_{z=0}\\&=2f(0)\pm f'(0)=2\pm f'(0).\end{aligned}$$

又由复积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]f(z)\frac{dz}{z}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[2\pm(e^{i\theta}+e^{-i\theta})f(e^{i\theta}i)d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}(1\pm\cos\theta)f(e^{i\theta})d\theta\right].\end{aligned}$$

而 $\quad 1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad 1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$

故

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2+f'(0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2-f'(0).$$

若 $\mathrm{Re}[f(z)]>0$，取上面两式（即题(1)、题(2)）的实部可知

$$2+\mathrm{Re}[f'(0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[f(e^{i\theta})]\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta\geqslant 0,$$

$$2-\mathrm{Re}[f'(0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\geqslant 0.$$

所以 $\quad -2\leqslant \mathrm{Re}[f'(0)]\leqslant 2,\quad$ 即 $\quad |\mathrm{Re}[f'(0)]\leqslant 2.$

例 24 如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部完全含于 D，证明：

(1) $u(x,y)$ 在 $u(x_0,y_0)$ 的值等于 $u(x,y)$ 在圆周 C 上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi;$$

(2) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆域 $|z-z_0|\leqslant r_0$ 上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

证 (1) 令 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，依柯西积分公式，有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

即
$$\begin{aligned}&u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\\&\quad+\mathrm{i}v(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)]\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

对照等式两边的虚部与实部，有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

(2) 因为在圆域上，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant r_0$，故由 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi$，$\int_0^{r_0}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}r_0^2$，可由题(1) 的结果，得

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}r\mathrm{d}r\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

例 25 若 n 是自然数，证明：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{n!}r^n,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(r\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

证 以 I_1 和 I_2 分别表示上述两式左边的积分，有

$$\begin{aligned} I_1 + \mathrm{i}I_2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r\sin\theta - n\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n} \\ &= \int_{|\zeta|=1} \mathrm{e}^{r\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{i}(\zeta - 0)^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\mathrm{e}^{rz}\right]_{z=0} \\ &= \frac{2\pi}{n!}r^n \quad（依据高阶导数公式）. \end{aligned}$$

比较等式左右两边的虚部与实部，即得所证的两个等式.

例 26（刘维尔定理） 设函数 $f(z)$ 在全平面解析，且有界（$|f(z)| \leqslant M$），则 $f(z)$ 为常数.

证 对任意 z_0，函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内解析，由柯西不等式（例 22），有

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

令 $R \to \infty$，得 $f'(z_0) = 0$. 由于 z_0 的任意性知，在全平面 $f'(z) \equiv 0$. 由第二章第一节例 15 题(3) 知，$f(z)$ 为常数.

例 27（最大模原理） 设 $f(z)$ 在由简单闭曲线 C 及围成的闭区域 D 上处处解析，且 $M = \max\limits_{\zeta\in D}|f(\zeta)|$ 证明：在 C 内处处有

$$|f(z)| \leqslant M.$$

证 设 n 是自然数，对函数 $[f(z)]^n$ 应用柯西积分公式，可知在 C 内任意点 z，都有

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

所以

$$|f(z)|^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta - z|}|d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{M^n}{|\zeta - z|}|d\zeta| = kM^n.$$

于是$\frac{|f(z)|}{M} \leqslant k^{1/n}$，其中 $k = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}$ 与 n 无关. 当 $n \to \infty$ 时，$\frac{|f(z)|}{M} \leqslant 1$，故 $|f(z)| \leqslant M$.

例 28 证明：若 C 为包含原点的闭曲线，则

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2}{n!}\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

证 $f(\zeta) = \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!}$，则 $f(z)$ 在复平面处处解析，由高阶导数公式，有

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

因为 $f^{(n)}(\zeta) = \frac{z^n}{n!}\cdot e^{z\zeta}\cdot z^n$，所以 $f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}(z^n)^2$，比较即知，命题成立. 即

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta} = \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2.$$

例 29 设函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且 $|f(z)| < M$，a,b 为任意两个相异复数. 证明：

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = 0, C: |z| = R \quad (R > |a|, R > |b|).$$

并推证 $f(a) = f(b)$.

证 因为

$$I \leqslant \oint_C \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|}|dz| \leqslant \oint_C \frac{|f(z)|}{(|z|-|a|)(|z|-|b|)}|dz|$$

$$< \frac{M\cdot 2\pi R}{(R-|a|)(R-|b|)} = \frac{2\pi M}{R(1-|a|/R)(1-|b|/R)}.$$

当 $R \to \infty$ 时，上式右边 $\to 0$，故 $I = 0$. 又

$$I = \frac{1}{a-b}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{a-b}\oint_C \frac{f(z)}{z-b}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{a-b}[f(a) - f(b)],$$

从而 $$\frac{2\pi i}{a-b}[f(a) - f(b)] = 0 \Longrightarrow f(a) = f(b).$$

例 30（代数基本定理） 任何一个 n 次多项式

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

在复平面上至少有一个根.

证 用反证法. 若 $P_n(z)$ 在复平面上没有根，即 $P_n(z) \neq 0$，于是函数 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ 在复平面上处处解析，则当 $|z| = R$，且 R 充分大时，有

$$|P_n(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_1}{|z|} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{|z|^{n-1}} + \frac{a_n}{|z|^n}\right|$$
$$\geqslant R^n\left(1 - \frac{a_1}{R} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{R^{n-1}} - \frac{a_n}{R^n}\right) \geqslant \frac{1}{2}R^n.$$

因此，在 $|z| = R$（R 充分大）上，有

$$|f(z)| = \frac{1}{|P_n(z)|} \leqslant \frac{2}{R^n}.$$

由最大模原理，有

$$\max_{|z|\leqslant R}|f(z)| = \max_{|z|=R}|f(z)| \leqslant \frac{2}{R^n}.$$

于是，在 $z = 0$ 处，应有

$$|a_n| = |P_n(0)| = \frac{1}{|f(0)|} \geqslant \frac{R^n}{2}.$$

这在 R 充分大时是不可能的，故假设不成立. 即命题成立.

例 31 计算积分 $\oint_{|z|=1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$，$n$ 为自然数. 并用其证明：

(1) $\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta d\theta = 2\pi\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$；

(2) $\int_0^{2\pi}\cos^{2m-1}\theta d\theta = 0$（$m$ 为自然数）.

证 因为 $|z| = 1$，所以 $z = e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 故

$$\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^n\mathrm{i}\mathrm{d}\theta=2^n\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta.$$

而由第一节例 4 知

$$\oint_{|z|=1}z^k\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & k=-1,\\ 0, & k\neq -1.\end{cases}$$

于是得：

(1) 当 $n=2m$ 时，因为按二项式定理，有

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2m}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\left[z^{2m}+2mz^{2m-1}\cdot\frac{1}{z}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!}z^m\cdot\frac{1}{z^m}+\cdots+\frac{1}{z^{2m}}\right].$$

所以，利用 $\oint_{|z|=1}z^k\mathrm{d}z$ 的结果，有

$$I=\int_{|z|=1}\frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$
$$=2\pi\mathrm{i}\frac{2m(2m-1)\cdots(2m-m+1)}{m!}=\frac{(2m)!}{(m!)^2}2\pi\mathrm{i}.$$

这样，就有

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{(2m)!}{(2^m m!)(2^m m!)}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}2\pi.$$

(2) 当 $n=2m-1$ 时，$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\cdot\frac{1}{z}$ 的展开式中第一项为 z^{2m-2}，以后各项依次减 2，不出现 $\frac{1}{z}$ 项，因而依 $\oint_C z^k\mathrm{d}z$ 的结果，有

$$\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2m-1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=0,$$

即
$$\int_0^{2\pi}\cos^{2m-1}\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

例 32 $|\mathrm{e}^z|$ 在 $|z-z_0|\leqslant 1$ 的何处取得最大值？最大值为多少？

解 因为 e^z 在全平面解析，则依最大模原理（见例 27）知，$|\mathrm{e}^z|$ 的最大值只能在其边界 $|z-z_0|=1$ 上达到. 设 $z=z_0+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z_0)+\cos\theta}$. 故当 $\theta=0$ 时，在点 $z=z_0+1$ 有最大值 $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z_0)+1}$.

第五节　解析函数与调和函数

主要内容

1. 调和函数

若实二元函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

2. 任何在区域 D 内解析的函数，它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

3. 若 $u(x,y)$ 为 D 内已确定的调和函数，则使 $u+\mathrm{i}v$ 成为解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 必满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即解析函数的虚部为实部的共轭调和函数. 但反过来一般不是.

疑难解析

1. 试解释解析函数与调和函数关系.

答　首先，调和函数 $\varphi(x,y)$ 是实二元函数. 它是实平面上的连续函数，具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程.

而解析函数是复函数，其实部与虚部都是调和函数，且其虚部是实部的共轭调和函数，都满足拉普拉斯方程.

由于解析函数的任何阶导数仍是解析函数，因此，$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的实部 u 和 v 的任意阶偏导数仍是调和函数.

2. 若 v 是 u 的调和函数，问：u 是否为 v 的共轭调和函数？

答 若 v 是 u 的共轭调和函数，则 $u+\mathrm{i}v$ 构成一个解析函数，且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

但要 u 是 v 的共轭调和函数，则 $v+\mathrm{i}u$ 要构成一个解析函数，这时应该有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

显然，两者是不可能同时满足的. 因此，两者的位置不能颠倒.

当 v 是 u 的共轭调和函数时，从满足的 C-R 条件可以看出：u 的共轭调和函数应为 $-v$.

如 $x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$ 是一个解析函数，所以 $2xy$ 是 x^2+y^2 的共轭调和函数. 但 $2xy+\mathrm{i}(x^2-y^2)$ 却不是解析函数，因为不满足 C-R 条件，所以 x^2-y^2 不是 $2xy$ 的共轭调和函数. $2xy+\mathrm{i}(y^2-x^2)$ 是解析函数，y^2-x^2 是 $2xy$ 的共轭调和函数.

3. 简述共轭调和函数的几种求法.

答 求共轭调和函数常用以下四种方法：

(1) C-R 条件法(偏积分法) 设 $u(x,y)$ 已知，求 $v(x,y)$. 因为 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$，所以

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+g(x)=\varphi(x,y)+g(x)\quad (g(x)\text{ 未知}).$$

再由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}+g'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$，求出 $g'(x)\Rightarrow g(x)$，于是 $v=\varphi(x,y)+g(x)$(见以下例 11(4)，(5)).

(2) 线积分法 设 $u(x,y)$ 已知，求 $v(x,y)$，则

$$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y,$$

(x_0, y_0) 可取(0,0) 或依函数条件确定(见以下例 11(1),(2),(3)).

(3) 凑微分法.

(4) 不定积分法　因为,若 $u(x,y)$ 已知,则由

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x,$$

得

$$f'(z) = U(z).$$

两边积分,得

$$f(z) = \int f'(z)dz.$$

具体用哪种方法,要根据具体问题或自己习惯来决定.如果已知 $v(x,y)$,要求出 $u(x,y)$,方法是类似的.

第四种方法要将 $u_x - iu_y$ 化为 $f'(z)$,方法见疑难解析 4.

4. 已求得 $u(x,y) + iv(x,y)$,如何化为 $f(z)$?

答　常用方法有以下三种:

(1) 代入法　将 $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ 代入 $u(x,y) + iv(x,y)$,化为 z 的函数 $f(z)$.

(2) 凑微分法　将 $u(x,y) + iv(x,y)$ 的各项通过分解,拼凑成 $x + iy$ 的因式,化为 z 的函数 $f(z)$.

(3) 归零法　设 $u(x,y) + iv(x,y)$ 中的 $y = 0$,得到 $f(x)$,再写成 z 的函数 $f(z)$.

三种方法中以归零法最为简便易行.疑难解析 3 中 $f'(z)$ 的确定也可按本题方法进行.

方法、技巧与典型例题分析

本节可能出现的问题有三个,一是验证一个函数是否为调和函数,这可通过求二阶偏导数来解决;二是已知 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$,求 $v(x,y)$ 或 $u(x,y)$,使 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数,求共轭调和函数的方法已在疑难解析 3 中给出;三是在求得 $u(x,y)$ 和 $u(x,y)$ 后,写出 $f(z) = u + iv$ 关于 z 的表达式,这也已在疑难解析 4 中给出.因此,解本节习题的技巧就转变为积分和计算的技

巧,读者应该是熟悉的.

例 1 验证下列函数是否为调和函数:

(1) $u = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$;

(2) $u = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

解 (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 12xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2 - 6xy + 6y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 12y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 12y,$$

显然,满足拉普拉斯方程,所以是调和函数.

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

显然,满足拉普拉斯方程,所以是调和函数.

例 2 在下列各对函数中,v 是否为 u 的共轭调和函数?

(1) $u = x,\ v = -y$;

(2) $u = e^x\cos y + 1,\ v = e^x\sin y + 1$.

解 (1) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$,不满足C-R条件,所以$v$不是$u$的共轭调和函数.

(2) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y; \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$,满足 C-R 条件,所以 v 是 u 的共轭调和函数.

例 3 设v是u的共轭调和函数,问:在下列各对函数中,后者是否为前者的共轭调和函数?

(1) $Au - Bv,\ Bu + Av$ (A,B 为常数);

(2) $u^2 - v^2,\ uv$.

解 由题设知:$u_x = v_y, u_y = -v_x$.

(1) 设 $P = Au - Bv, Q = Bu + Av$,则

$$P_x = Au_x - Bv_x, \qquad P_y = Au_y - Bv_y,$$

$$Q_x = Bu_x + Av_x, \qquad Q_y = Bu_y + Av_y,$$

所以 $P_x = Q_y = Au_x - Bv_x, \quad P_y = -Q_x = Au_y - Bv_y,$
满足 C-R 条件. 即 $Au + Av$ 是 $Au - Bv$ 的共轭调和函数.

(2) 设 $P = u^2 - v^2, Q = uv$, 则

$$P_x = 2u \cdot u_x - 2vv_x, \quad P_y = 2uu_y - 2vv_y,$$

$$Q_x = u_x v + uv_x, \quad Q_y = u_y v + uv_y,$$

所以 $P_x \neq Q_y, P_y \neq -Q_x$ 不满足 C-R 条件. 即 uv 不是 $u^2 - v^2$ 的共轭调和函数.

例 4 确定形如 $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的所有调和函数.

解 令 $t = \frac{y}{x}$, 则 $u = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t)$. 于是

$$u_x = f'(t)\frac{-y}{x_2}, \quad u_{xx} = f''(t)\frac{y^2}{x^4} + f'(t)\frac{2y}{x^3},$$

$$u_y = f'(t)\frac{1}{x}, \qquad u_{yy} = f''(t)\frac{1}{x^2}.$$

由拉普拉斯方程知

$$f''(t)\left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) + f'(t)\frac{2y}{x^3} = 0,$$

即
$$f''(t)(1 + t^2) + 2tf'(t) = 0.$$

积分
$$\frac{\mathrm{d}f'(t)}{f'(t)} = \frac{-2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \ \left([f'(t)]' = f''(t)\right),$$

得
$$f'(t) = \frac{C_1}{1+t^2}.$$

再积分, 得
$$f(t) = C_1 \arctan t + C_2.$$

故, 形如 $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的调和函数为

$$u = C_1 \arctan\frac{y}{x} + C_2,$$

C_1, C_2 为任意常数.

例 5 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 问: $|f(z)|$ 和 $\ln|f(z)|$ 是否在 D 内解析? 是否为 D 内的调和函数?

解 (1) 若 $u^2+v^2\neq 0$，且 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$ 解析，则 $|f(z)|^2=u^2+v^2$ 也解析. 由 C-R 条件，得

$$\frac{\partial(u^2+v^2)}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(u^2+v^2)}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

由此以及 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，可以得出

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ -v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\xRightarrow{u^2+v^2\neq 0}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\end{cases}$$

于是，知 $f(z)$ 恒为常数 C.

若有点使 $u^2+v^2=0$，即 $u=0,v=0$，由连续性知 $C=0$，即 $f(z)=0$.

又由

$$\frac{\partial^2\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sqrt{u^2+y^2}}{\partial y^2}$$

$$=\frac{[(u_x)^2+(v_x)^2+uu_{xx}+vv_{xx}](u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^{3/2}}-\frac{(uv_x+vu_x)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$+\frac{[(u_y)^2+(v_y)^2+uu_{yy}+vv_{yy}](u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^{3/2}}-\frac{(uu_y+vv_y)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}.$$

利用 u,v 满足 C-R 条件，且满足拉普拉斯方程，整理上式可得

$$\frac{\partial^2\sqrt{u^2+v^2}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sqrt{u^2+v^2}}{\partial y^2}=\frac{(u_x)^2+(u_y)^2}{(u^2+v^2)^{1/2}}.$$

所以，若 $\sqrt{u^2+v^2}$ 在 D 内调和，当 $u^2+v^2\neq 0$ 时，就有 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，因此 C-R 条件成立，故 $f(z)\equiv C$.

(2) 若 $\ln|f(z)|$ 在 D 内解析，则复合函数 $\exp[\ln|f(z)|]=|f(z)|$ 也在 D 内解析，由题(1) 知，$f(z)\equiv$ 常数.

已知 $\ln|f(z)| = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$，因此

$$\frac{\partial^2 \ln|f(z)|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln|f(z)|}{\partial y^2}$$
$$= \frac{[(u_x)^2+(v_x)^2](u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2(uu_x+vv_x)^2}{(u^2+v^2)^2}$$
$$+ \frac{[(u_y)^2+(v_y)^2](u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2(uu_y+vv_y)^2}{(u^2+v^2)^2}.$$

利用 u 与 v 满足 C-R 方程，易知

$$\frac{\partial^2 \ln|f(z)|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln|f(z)|}{\partial y^2} = 0, \quad u^2+v^2 \neq 0.$$

因此，在 $u^2+v^2 \neq 0$ 处，$\ln|f(z)|$ 是调和函数.

例 6 设函数 $u(x,y)$ 是 D 内的调和函数，而函数 $z = g(\zeta) = x(\xi,\eta) + \mathrm{i}y(\xi,\eta)$ 是 G 内的解析函数. 设 ζ 在 G 内变化时，其数值 $z = g(\zeta)$ 位于域 D 中. 证明：$u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ 是域 G 中的调和函数.

证法 1 对 G 中任意点 (ξ,η)，在其邻域中 $z = g(\zeta)$ 的像必位于 $z = (x,y)$ 的邻域中，而在 $z = (x,y)$ 邻域中存在解析函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. 显然复合函数

$$f[g(\zeta)] = u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)] + \mathrm{i}v[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$$

在 (ξ,η) 的邻域中解析. 因此 $u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ 是调和函数.

证法 2 直接求证. 由

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将两式相加，利用 x,y 是调和函数，均满足拉普拉斯方程，且 x,y 之间又满足 C-R 方程，有

$$|g'(\zeta)| = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2,$$

即得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

故 $u[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)]$ 是 G 内的调和函数.

例 7 证明：函数 $u = x^2 - y^2, v = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 不是解析函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

故 u 是全平面上的调和函数，v 除原点外在全平面上调和.

但 $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 不满足 C-R 条件，所以 $f(z)$ 不是解析函数.

例 8 证明：若 u 为调和函数且不等于常数，则 u^2 不是调和函数.

证 因为 u 是调和函数，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

又
$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

同理
$$\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

故
$$\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial y^2} = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \neq 0.$$

因为 u 不为常数，所以$\frac{\partial u}{\partial x}$ 和$\frac{\partial u}{\partial y}$ 不同时为零，所以上式不同时为零.即 u^2 不是调和函数.

例 9 证明：若 u 为单连通域 B 内的调和函数，则 $u(\bar{z})$ 在 B 关于实轴的对称区域 $\overline{B}$ 内为调和函数.

证 因为 u 在 B 内为调和函数，所以必有 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 为 B 内解析函数. 由第二章第一节例 16 知

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - \mathrm{i}v(x, -y)$$

在 $\overline{B}_1$ 内解析，故 $u(\bar{z}) = u(x, -y)$ 为 $\overline{B}_1$ 内调和函数.

例 10 求形如 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 的最一般的调和函数. 并求其共轭调和函数及对应的解析函数.

解 (1) 因为 $u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ax + 2by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6dy + 2cx.$$

由于 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (6a + 2c)x + (6d + 2b)y = 0,$$

故 $$\begin{cases} 6a + 2c = 0, \\ 6d + 2b = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} c = -3a, \\ b = -3d. \end{matrix}$$

即 u 的一般形式的调和函数为

$$u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3,$$

其中 a, d 为任意实数.

因为 $$u'_x = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2,$$
$$u'_y = -3dx^2 - 6axy + 3dy^2$$

所以 $f'(z) = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2 + (3dx^2 + 6axy - 3dy^2)\mathrm{i}$，

令 $y = 0$，得 $f'(x) = 3ax^2 + 3dx^2\mathrm{i}$，即知 $f'(z) = 3az^2 + 3dz^2\mathrm{i}$，

于是 $$f(z) = \int (3a + 3d\mathrm{i})z^2 dz = az^3 + \mathrm{i}dz^3 + C.$$

例 11 已知 $u(x,y)$ 有下列形式，求其共轭调和函数，并写出 $f(z)$ 的形式.

(1) $u = x^2 - y^2 + xy$;　　(2) $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 0$;

(3) $u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$;

(4) $u = 2(x - 1)y$, $f(2) = -\mathrm{i}$;

(5) $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$;　　(6) $u = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin xy$, $f(0) = 0$.

解　在疑难解析中,我们已指出求共轭调和函数 $v(x,y)$ 和 $f(z)$ 各有几种方法,读者可选择自己习惯的方法. 我们一般每题只给出一种解法,供读者参考.

(1) $u = x^2 - y^2 + xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$,故满足拉普拉斯方程,$u$ 是调和函数.

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + x = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$,依线积分法,有

$$\begin{aligned} v &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y + C \\ &= \int_0^x (-x)\mathrm{d}x + \int_0^y (2x + y)\mathrm{d}y + C \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + C, \end{aligned}$$

所以　$f(z) = x^2 - y^2 + xy + \mathrm{i}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + 2xy + C\right)$.

令 $y = 0$,上式化为

$$f(x) = x^2 - \mathrm{i}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

代回 z,即得

$$f(z) = z^2 - \mathrm{i}\,\frac{z^2}{2} + \mathrm{i}C.$$

(2)　$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{6x^2 y - 2y^2}{(x^2 + y^2)^3}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-6x^2y+2y^2}{(x^2+y^2)^3},$$

所以$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u$ 为调和函数(除原点外).

用线积分法取(x_0,y_0)为$(1,0)$，有

$$\begin{aligned} v&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C\\ &=\int_1^x\frac{x^2}{x^4}\mathrm{d}x-x\int_0^y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+C\\ &=\frac{1}{x}-1+\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^y=\frac{x}{x^2+y^2}-1+C. \end{aligned}$$

所以 $$f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\left(\frac{x}{x^2+y^2-1}\right)+C\xRightarrow{f(1)=0}C=0.$$

令 $y=0$，得 $f(x)=\mathrm{i}\left(\frac{1}{x}-1\right)$. 代回 z，故有

$$f(z)=\mathrm{i}\left(\frac{1}{z}-1\right).$$

(3) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 是全平面的调和函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+4xy+y^2+(x-y)(2x+4y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y),$$

所以 $$\begin{aligned} v&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}[(x^2+4xy+y^2)-(x-y)(4x+2y)]\mathrm{d}x\\ &\quad+[(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)]\mathrm{d}y+C\\ &=\int_0^1-3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y+C\\ &=-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C. \end{aligned}$$

于是 $$\begin{aligned} f(z)&=(x-y)(x^2+4xy+y^2)\\ &\quad+\mathrm{i}(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C), \end{aligned}$$

令 $y=0$，得 $f(x)=x^3+\mathrm{i}(-x^3+C)$，代回 z，故有

$$f(z)=z^3+\mathrm{i}(C-z^3).$$

(4) 因为$\frac{\partial v}{\partial y}=2y=\frac{\partial v}{\partial y}$，由 C-R 条件，有

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}y + \varphi(x) = y^2 + \varphi(x),$$

而 $$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x).$$

又 $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2(1-x),$$

故 $\varphi(x) = \int 2(1-x)\mathrm{d}x = 2x - x^2 + C$，$C$ 为实常数.

于是 $$v = y^2 - x^2 + 2x + C.$$

$$f(z) = 2(x-1)y + \mathrm{i}(y^2 - x^2 + 2x + C) \xRightarrow{f(2)=-\mathrm{i}} C = -1.$$

令 $y=0$，得 $$f(x) = \mathrm{i}(-x^2 + 2x + C),$$

所以 $$f(z) = \mathrm{i}(-z^2 + 2z - 1) = -\mathrm{i}(z-1)^2.$$

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，由 C-R 条件，有

$$v = \int \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + \varphi(x) = \arctan\frac{y}{x} + \varphi(x),$$

故 $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi'(x),$$

又 $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

所以 $\varphi'(x) = 0$，$\varphi(x) = C$，C 为实常数.

于是 $$v = \arctan\frac{y}{x} + C.$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\left(\arctan\frac{y}{x} + C\right).$$

令 $y=0$，得 $$f(x) = \ln x + \mathrm{i}C,$$

故有 $$f(z) = \ln z + \mathrm{i}C \Rightarrow f(z) = \mathrm{Ln}z + \mathrm{i}C.$$

(6) $u_x = 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}y\cos 2xy,$

$u_y = -2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy.$

由导数公式，有

$$f'(z) = 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy$$
$$- \mathrm{i}[-2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy].$$

令 $y=0$，得 $$f'(x)=-2\mathrm{i}xe^{x^2},$$
所以 $$f'(z)=-2\mathrm{i}ze^{z^2},$$
于是 $$f(z)=\int f'(z)\mathrm{d}z=\int -2\mathrm{i}ze^{z^2}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}e^{z^2}+C.$$
由 $$f(0)=0\Longrightarrow C=\mathrm{i},$$
即有 $$f(z)=\mathrm{i}(1-e^{z^2}).$$

例 12 已知 $v(x,y)$ 的下列形式，求 $u(x,y)$ 与解析函数 $f(z)$.

(1) $v=-2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y+y$, $f(0)=2$;

(2) $v=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$;

(3) $v=2\cos x\,\mathrm{ch}y-x^2+y^2$, $f(0)=2$;

(4) $v=\arctan\dfrac{y}{x}$, $x>0$.

解 (1) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-4\cos 2x\,\mathrm{ch}2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4\sin 2x\,\mathrm{ch}2y+1$，故

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=-4\sin 2x\,\mathrm{ch}2y+1-4\mathrm{i}\cos 2x\,\mathrm{ch}2y\\&=-4\sin 2x\cos \mathrm{i}2y-4\cos 2x\sin \mathrm{i}2y+1\\&=-4\sin(2x+\mathrm{i}2y)+1=-4\sin 2z+1.\end{aligned}$$

所以 $$f(z)=\int f'(z)\mathrm{d}z=2\cos 2z+z+C.$$
将 $f(0)=2$ 代入，得
$$2\cos 0+0+C=2\Longrightarrow C=0,$$
即有 $$f(z)=2\cos 2z+z.$$

(2) $$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1=\frac{\partial u}{\partial x},$$
故 $$\begin{aligned}u&=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=\int[e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y+1)]\mathrm{d}x\\&=e^x(x\cos y-y\sin y)+x+g(y).\end{aligned}$$
求 $$-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)-g'(y),$$
而 $$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)+1\Longrightarrow g'(y)=-1.$$

所以 $g(y)=-y+C,\ u=e^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C,$

$$f(z)=u+iv=e^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C$$
$$+i[e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y].$$

令 $y=0$,得 $$f(x)=e^x x+x+C+ix.$$

代回 z,即得 $$f(z)=ze^z+z+iz+C.$$

(3) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2\sin x\operatorname{ch}y-2x=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

故 $u=\int(2\sin x\operatorname{ch}y+2x)dy=2\sin x\operatorname{sh}y+2xy+g(x).$

而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2\cos x\operatorname{sh}y+2y+g'(x)=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2\cos x\operatorname{sh}y+2y,$

则 $g'(x)=0,\ g(x)=c,\ u=2\sin x\operatorname{sh}y+2xy+C,$

$$f(z)=2\sin x\operatorname{sh}y+2xy+C+i(2\cos x\operatorname{ch}y-x^2+y^2).$$

令 $y=0$,得

$$f(x)=i(2\cos x-x^2)+C\xRightarrow{f(0)=2}C=2-2i,$$

于是 $$f(z)=i(2\cos z-z-2)+2.$$

(4) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

故 $u=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dx=\int\dfrac{x}{x^2+y^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y).$

而 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

则 $g'(y)=0,\quad g(y)=C\Rightarrow u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C,$

于是 $$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+i\arctan\frac{y}{x}.$$

令 $y=0$,得 $$f(x)=\ln x+C+i0,$$

所以 $$f(z)=\ln z+C.$$

例 13　按下列函数形式,求解析函数 $f(z)$.

(1) $u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$;

(2) $u-v=x^2-y^2-2xy.$

解　(1) 因为 $f(z)=u+iv$,v 是 u 的共轭调和函数,所以先

求出 u,v 的一阶偏导数.

$(u+v)_x=u_x+v_x=x^2+4xy+y^2+(2x+4y)(x-y)-2$,

$(u+v)_y=u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2$,

而由 C-R 条件,$u_x+v_x=v_y-u_y$,将两式相加,得

$$v_y=3x^2-3y^2-2,\quad v_x=6xy.$$

故 $\quad v=\int v_x\mathrm{d}x+g(y)=\int 6xy\mathrm{d}x+g(y)=3x^2y+g(y).$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2+g'(y)=3x^2-3y^2-2\Rightarrow g'(y)=-3y^2-2$,

于是 $\quad g(y)=-y^3-2y+C\Rightarrow V=3x^2y-y^3-2y+C$,

$$u=(u-v)-v=x^3-3xy^2-2x-C,$$

$$f(z)=x^3-3xy^2-2x-C+\mathrm{i}(3x^2y-y^3-2y+C).$$

令 $y=0$,得 $\quad f(x)=x^3-2x-C+\mathrm{i}C$,

所以 $\quad f(z)=z^3-2z+C(\mathrm{i}-1).$

(2) $(u-v)_x=u_x-v_x=2x-2y\overset{\text{C-R}}{=\!=}u_x+u_y$,

$$(u-v)_y=u_y-v_y=-2y-2x\overset{\text{C-R}}{=\!=}u_y-u_x.$$

解方程,得 $\quad u_y=-2y,\ u_x=2x$,

于是 $\quad u=\int -2y\mathrm{d}y+g(x)=-y^2+g(x).$

又由 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=g'(x)=2x\Rightarrow g(x)=x^2+C$

$$\Rightarrow u=-y^2+x^2+C,$$

故 $\quad v=u-(u-v)=x^2-y^2+c-(x^2-y^2-xy)$

$$=2xy+C,$$

所以 $\quad f(z)=x^2-y^2+C+\mathrm{i}(2xy+C).$

令 $y=0$,得 $\quad f(x)=x^2+C+\mathrm{i}C$,

即 $\quad f(z)=z^2+C(1+\mathrm{i}).$

例 14 由下列条件,求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(1) $u=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$,D 为去原点的复平面;

(2) $v=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$,$D$ 为去正实轴的复平面.

解 因为 $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$,所以

$$u=\frac{1}{2}[f(z)+\overline{f(z)}],\ v=\frac{1}{2\mathrm{i}}[f(z)+\overline{f(z)}].$$

$$(1)\ u=\frac{[(z+\bar{z})/2]^2-[(z-z)/2\mathrm{i}]^2}{(z\bar{z})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{2[(\bar{z})^2+z^2]}{(z\bar{z})^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(\bar{z})^2}\right],$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+C.$$

$$(2)\ v=2\ln|z|-\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-z}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=2\ln|z|-\frac{z^2+(\bar{z})^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[4\mathrm{i}\ln|z|-\mathrm{i}(z^2+(\bar{z})^2],$$

所以

$$f(z)=2\mathrm{i}\ln|z|-\mathrm{i}z^2.$$

例 15 已知 $v(x,y)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2-y^2}}$,求解析函数

$$f(z)=u+\mathrm{i}v.$$

解 利用极坐标形式求解. 将 $v(x,y)$ 化为

$$v(x,y)=\sqrt{-r\cos\theta+r}=\sqrt{2r\sin^2(\theta/2)}=\sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2},$$

则

$$v_r=\sqrt{1/(2r)}\sin\frac{\theta}{2},\ v_\theta=\sqrt{r/2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

由 C-R 条件的极坐标形式(见第二章第一节例 19)得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\theta}=\sqrt{1/(2r)}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r} = -\sqrt{r/2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

于是 $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\sqrt{2r} + \sqrt{2r}\mathrm{d}\cos\frac{\theta}{2}$

$$= \mathrm{d}\left(\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

即 $u = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C.$

所以 $f(z) = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2} + C + \mathrm{i}\sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2}$

$$= \sqrt{2r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) + C = \sqrt{2z} + C.$$

第四章　级　数

本章除了理解复数项和复变函数项级数的基本概念和性质外，重点是认识复变函数项级数中的幂级数与洛朗级数的运算与敛散性，掌握将解析函数展开成幂级数和洛朗级数的方法.

第一节　复数项级数

主要内容

1. 若 $\alpha_n = a_n + ib_n$ （a_n, b_n 为实数），则数列 $\{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 称为一个复数列.

设 $\alpha = a + ib$ 为一确定的复数，如果对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon) > 0$，使当 $n > N$ 时，有不等式 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 成立，则称 α 为复数列 $\{\alpha_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \quad 或 \quad \alpha_n \to \alpha,\ n \to \infty.$$

也称复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α.

2. 复数列 $\{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 收敛于 α 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

3. 设 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 为一复数列，则和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

称为无穷级数. 前 n 项的和 $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 称为级数的部分和.

如果部分和数列$\{S_n\}$收敛，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$称为级数的和.

4. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的充分必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛.

复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

5. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也收敛，且不等式$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$成立.

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛. 非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

疑 难 解 析

1. 已知若$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)$收敛. 若$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)$也发散吗?

答 不一定.

如$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{n^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=-\frac{1}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{n^2}$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$都发散. 但是$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}\frac{2}{n^2}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散.

而$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)$却收敛.

2. 求无穷级数的和与求序列的极限之间有什么联系?

答　复数项级数和的定义与实数项级数和的定义几乎一样,都是由级数前 n 项的和(部分和)当 $n\to\infty$ 时的极限确定.即如果复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$的部分和序列$\{S_n\}$当 $n\to\infty$ 时极限存在,$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ 的值就是级数的和.

因此求复数项级数的和是与求序列极限有着紧密联系的.

3. 什么样的级数具有项的可结合性与可交换性?

答　复数项级数与实数项级数有着紧密的联系,一般地,对一个复数项级数的讨论可以归结为对两个实数项级数的讨论.由实数项级数我们知道:一般的复数项级数不具有项的可结合性与可交换性.

如$\sum_{n=1}^{\infty}i^n=i-1-i+1+i-\cdots$是发散的,但加括号后,$(-i-1+i-1)+(-i-1+i-1)+\cdots$是收敛的,因此,项的结合改变了级数的敛散性.

当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛时,级数的项有可结合性.仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$为绝对收敛时,级数的项有可交换性,且不改变其和.

定理 1　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛,则任意重排其各项的次序所得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也绝对收敛,且其和不变.

定理 2　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha$,$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\beta$都绝对收敛,则其柯西乘积$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1)$也绝对收敛,且$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\alpha\beta$.

方法、技巧与典型例题分析

本节讨论的是复数列、复级数的敛散性和复级数的绝对收敛、条件收敛等问题.

复数列的敛散性可以由两个实数列的敛散性确定,复级数的敛散性可以由两个实级数的敛散性确定.因此,高等数学课程中关于实级数判敛的方法与技巧都可以应用.

要注意的是,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 中的 $|\alpha_n|$ 不再是实数项级数中的绝对值,而是复数 α_n 的模,同时与 a_n,b_n 有关,不要认为 $|\alpha_n|$ 与 $|a_n|$, $|b_n|$ 有关.

例 1 判别下列数列是否收敛?如果有极限,求出它们的极限.

(1) $\alpha_n=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$; (2) $\alpha_n=\dfrac{3^{1/n}2^n}{1+2^n}+\mathrm{i}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-n}$;

(3) $\alpha_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}$; (4) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}$;

(5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/2}$; (6) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{\mathrm{i}}{n+1}$.

解 先分解 $\alpha_n=a_n+\mathrm{i}b_n$,然后分别考察 a_n 和 b_n 的极限,再确定数列 $\{\alpha_n\}$ 的敛散性.

(1) $$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}=0,$$

故 $\left\{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\right\}$ 收敛于零.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{1/n}2^n}{1+2^n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-1/2},$$

故$\left\{\dfrac{3^{1/n}2^n}{1+2^n}+\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{1+2n}\right)^{-n}\right\}$收敛于$1+\mathrm{i}e^{-1/2}$.

(3) $$\frac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}=\frac{1-n^2}{1+n^2}+\mathrm{i}\,\frac{2n}{1+n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+n^2}=0,$$

故$\left\{\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}\right\}$收敛于$-1$.

(4) $$\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}=\left[\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\right]^n$$
$$=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta),$$
$$\theta=\arctan\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n\cos n\theta=0,\quad \lim\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n(-\sin n\theta)=0,$$

故$\left\{\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}\right\}$收敛于零.

(5) $$\frac{1}{n}e^{-\mathrm{i}n\pi/2}=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=0,$$

故$\left\{\dfrac{1}{n}e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\right\}$收敛于零.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, 故$\left\{(-1)^n+\dfrac{\mathrm{i}}{n+1}\right\}$发散.

例 2 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在}, & |\alpha|=1,\alpha\neq 1.\end{cases}$$

证 令 $\alpha = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，于是：

(1) $|\alpha| < 1$ 时，$r < 1$.

$$0 \leqslant |\alpha^n| \leqslant r^n(|\cos n\theta| + |i\sin n\theta|) \leqslant 2r^n,$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$，所以由夹逼定理，有

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0.$$

(2) $|\alpha| > 1$ 时，$r > 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty.$$

因为 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 不同时为零，所以

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty.$$

(3) $\alpha = 1$ 时，$\alpha = \cos 0 + i\sin 0$，$\alpha^n = \cos 0 = 1$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 1.$$

(4) $|\alpha| = 1$，$\alpha \neq 1$，则 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$，$\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n\theta)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty\theta}(\sin n\theta)$ 均不存在，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$ 不存在.

例 3 设复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 全部在半平面 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 上，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ 都收敛. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ 也收敛.

证 设 $z_n = x_n + iy_n$，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ 收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ 收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2)$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 是实数项级数(知 $x_n \geqslant 0$，由 $\mathrm{Re}(z) > 0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 为正项级数. 由高等数学知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$. 故当 n 充分大时，$x_n^2 < x_n$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛). 由于

$$|z_n|^2 = x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2 - (x_n^2 - y_n^2),$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}2x_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2-y_n^2)$都收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$收敛.

例 4 判断下列级数是否收敛：

(1) $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^n+\cdots$；

(2) $5i-\dfrac{(5i)^3}{3!}+\dfrac{(5!)^5}{5!}+\cdots$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+i^{2n+1})$.

解 将级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，由两个实级数的敛散性，确定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$的敛散性.

(1) $1+i+i^2+\cdots+i^n+\cdots=1+i-1-i+\cdots$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散.

(2) $$5i-\frac{(5i)^3}{3!}+\frac{(5!)^5}{5!}-\cdots=i\left(5+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^5}{5!}-\cdots\right)=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{2n-1}}{(2n-1)!}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛.

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+i\frac{1}{n}(-1)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

虽然$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散.

例 5 若$|\arg\alpha_n|\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\delta\quad(\delta>0)$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$的敛散性相同($\alpha_n=a_n+ib_n$).

证 因为

$$|\alpha_n|=\frac{a_n}{\cos(\arg\alpha_n)}\leqslant\frac{a_n}{\cos(\pi/2-\delta)}=\frac{a_n}{\sin\delta},$$

所以，当$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$必收敛；当$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$必发散．即$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$与$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$的敛散性相同．

例 6 设$\lim\limits_{n\to\infty}z_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_{2n+1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$．

解 对任意$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，有$|z_{2n}-a|<\varepsilon$．同时存在$N_2>0$，当$n>N_2$时，有$|z_{2n+1}-a|<\varepsilon$，所以，取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，对z_{2n}和z_{2n+1}．都有

$$|z_k-a|<\varepsilon.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}z_n=a.$$

例 7 判别下列级数是否收敛，是否绝对收敛．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}$； (3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5\mathrm{i}}{2}\right)^n$； (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\mathrm{i}n$； (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1+\mathrm{i})^n$．

解 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，所以不绝对收敛．又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}=\mathrm{i}-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{3}+\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{i}}{5}-\cdots$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right),$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}$也收敛．所以原级数收敛，是条件收敛．

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(3+5\mathrm{i})^n}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$，由正项级数的达朗贝尔比值法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$收敛，所以原数绝对收敛．

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，由比较判别法知，因为$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$，

所以级数不绝对收敛.

当 $n=2k$ 时，级数化为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k}$，是收敛的；当 $n=2k+1$ 时，级数化为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$ 也收敛，所以原级数条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1+5\mathrm{i}}{2}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^n$ 是公比大于 1 的等比级数，不满足必要条件，所以发散.

(5) 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos \mathrm{i}n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n,$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^n$ 发散，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n$ 收敛，所以级数发散.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n(1+\mathrm{i})^n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$，由柯西根值法，级数收敛，所以原级数绝对收敛.

例 8 设 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\xi$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=\xi \quad (\xi\text{ 为有限复数}).$$

证 设 $\alpha_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，$\xi=a+\mathrm{i}b$，则 $a_n\to a$，$b_n\to b$. 由实数域中的同一极限(柯西定理)，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=b,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\xi.$$

例 9 证明柯西不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$$

成立，其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为复数.

证　用二次三项式判别式的方法来证. 令

$$A=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2,\quad B=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2,\quad C=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|,$$

有

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|x+|b_k|)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^2x^2+2|a_kb_k|x+|b_k|^2)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)x^2+2\sum_{n=1}^{n}|a_kb_k|x+\sum_{n=1}^{n}|b_k|^2\geqslant 0,$$

即二次三项式 $Ax^2+2Dx+B\geqslant 0$.

由不等式性质知 $D=\sum_{n=1}^{\infty}|a_kb_k|\geqslant C\geqslant 0$, $y=Ax^2+2Dx+B$ 给出其抛物线位于 x 轴上方, 至多与 x 轴有一个交点. 因此, 判别式

$$(2D)^2-4AB\leqslant 0\Longrightarrow D^2\leqslant AB$$

成立, 故 $C^2\leqslant AB$. 命题得证.

第二节　幂　级　数

主 要 内 容

1. 设 $\{f_k(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是一复变函数序列, $f_n(z)$ 在 D 内有定义, 则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为复变函数项级数;

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$$

称为复变函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的部分和.

对于 $z_0 \in D$，若 $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = S(z_0)$ 存在，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛，$S(z_0)$ 为它的和. 若级数在 D 内处处收敛，则其和是 D 内的一个和函数

$$S(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

称为复变幂级数，简称幂级数.

2. 阿贝尔(Abel)定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 \quad (z_0 \neq 0)$ 收敛，则对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，级数必绝对收敛. 如果在 $z = z_0$ 级数发散，则对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z，级数必发散.

一个幂级数的收敛情况，可分为：

(1) 在全平面处处收敛；

(2) 仅在原点 $z = 0$ 收敛；

(3) 在以原点为中心的圆周 C_R 内，级数绝对收敛；在 C_R 外，级数发散. C_R 称为收敛圆，C_R 的半径称为收敛半径.

收敛圆周上级数的敛散性，根据具体情况分析确定.

3. 收敛半径的求法

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径，有以下三种求法：

(1) 比值法　如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法　如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\mu\neq 0$,则收敛半径$R=\dfrac{1}{\mu}$.

(3) 柯西 - 哈达玛(Cauchy-Hadamard) 法　如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\mu$,则收敛半径$R=\dfrac{1}{\mu}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ 称 $n\to\infty$ 时的上极限.

若 $\mu=0$,则 $R=+\infty$;若 $\mu=+\infty$,则 $R=0$.

4. 幂级数的运算性质

(1) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n, R=r_1, g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n, R=r_2$,则

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n),\ |z|<R,$$

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(ab_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n),\ |z|<R.$$

其中,$R=\min(r_1,r_2)$.

(2) 如果当 $|z|<r$ 时,$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$;又在 $|z|<R$ 时,$g(z)$ 解析且满足 $|g(z)|<r$,则当 $|z|<R$ 时,有

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n.$$

这个代换运算,相当于高等数学中的复合过程,是将函数展开成幂级数的一个有效方法.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R,则

(1) 幂级数的和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 是收敛圆 $|z-a|<R$ 内的解析函数.

(2) 和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内逐项可导,即

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}.$$

(3) 和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内逐项可积，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_C(z-a)^n\mathrm{d}z,\quad C\in|z-a|<R,$$

或
$$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

疑 难 解 析

1. 阿贝尔定理的意义是什么？

答 阿贝尔定理又称为幂级数敛散性定理，它将讨论幂级数的敛散性问题归结为讨论一个点的级数的敛散性问题. 即：若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在点 z_0 收敛，则在一切满足 $|z|<|z_0|$ 的点 z 收敛；若 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在点 z_0 发散，则在一切满足 $|z|>|z_0|$ 的点 z 发散. 从而指出，对一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，必存在一正数 R，使在 $|z|<R$ 内级数收敛，在 $|z|>R$ 内，级数发散. 因而给我们讨论幂级数的性质提供了很大便利，特别是对幂级数及其导出级数敛散性的确定有重要的意义.

2. 怎样确定幂级数在收敛圆周上的敛散性？

答 幂级数在收敛圆周上的敛散性有三种情形. 一是在收敛圆周上都发散，二是在收敛圆周上都收敛，三是在收敛圆周上某些点收敛，在某些点发散.

因此，要根据幂级数的具体情况，对 z 的值利用复数项级数的敛散性判别法讨论.

例如，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径都是 1. 但是 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 因为 $z^n \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$，所以在收敛圆周上处处发散；$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在 $z=1$ 点不收敛，在其余点都收敛；$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 因为有 $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，所以在收敛圆周上处处收敛.

3. 怎样实行幂级数的代换（复合）运算？

答 其原则方法是：根据问题要求，对函数变形使原来函数 $f(z)$ 中，出现需要的因式 $g(z)$，得到 $f[g(z)]$，然后进行运算.

例如，要将函数 $\frac{1}{4-3z}$ 展开为 $(z-1-\mathrm{i})$ 的幂级数，先将函数 $\frac{1}{4-3z}$ 化为含 $(z-1-\mathrm{i})$ 因式的函数

$$\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{1-3\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-3[z-(1+\mathrm{i})]/(1-3\mathrm{i})},$$

再按 $\frac{1}{1-z}$ 的展开式展开，得

$$\frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z-(1+\mathrm{i})]^n}{(1-3\mathrm{i})^{n-1}}.$$

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

答 不能. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ 的收敛圆中心为 $z=2$，若在 $z=0$ 收敛，则收敛半径 $R \geqslant 2$. 这时，$z=3$ 在收敛域内. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ 不可能在 $z=3$ 发散.

5. 有了根值法，为什么还要柯西-哈达玛法？

答 因为对于某些幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 可能不存在，这时 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ 若存在，则可确定 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的敛散性.

例如，对于$\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]^n z^n$，由根值法可知$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$不存在，无法确定其敛散性. 但是$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=3$，所以可以确定$\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]^n z^n$的收敛半径$R=\frac{1}{3}$.

方法、技巧与典型例题分析

本节主要讨论幂级数的收敛半径、收敛域及和函数，因此要求熟练掌握求收敛半径的三种方法. 收敛圆上点的敛散性要用实数项级数与复数项级数敛散性来确定，以前学过的方法与技巧都可以应用. 对和函数的求得，要依靠幂级数的运算和性质的灵活运用来进行.

一、幂级数敛散性的讨论

例 1 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的系数单调减少并趋向于零，证明：

(1) 幂级数收敛半径$R\geqslant 1$；

(2) 若$R=1$，则除$z=1$外，级数在收敛圆周上处处收敛.

证 (1) 因为$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，所以当$n>N$时，有$|a_n|<1$，故$\mu=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant 1$，收敛半径$R\geqslant 1$.

(2) 若$R=1$，可令$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 当$\theta\neq 0$ $(z\neq 1)$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

而
$$\left|\sum_{k=}^{n}\cos k\theta\right|=\left|\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}\right]\Big/2\sin n\frac{\theta}{2}\right|$$
$$\leqslant 1\Big/\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

$$\left|\sum^{n}\sin k\theta\right| = \left|\left[\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]/2\sin\frac{\theta}{2}\right| \leqslant 1/\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

由狄利赫利判别法，两级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\theta$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin n\theta$ 收敛，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 收敛.

而当 $\theta = 0$ 时，如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 收敛.

例 2 讨论幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1} - z^n)$ 的敛散性及一致收敛性区域.

解 因为部分和 $\sum_{k=0}^{n}(z^{k+1} - z^k) = z^{n+1} - 1$，所以，当 $|z| < 1$，$S_n \to -1$；当 $z = 1$ 时，$S_n \to 0$；当 $z = -1$ 时，S_n 不存在；当 $z = e^{i\theta}$ 而 $\theta \neq 0$（即 $|z| = 1, z \neq 1$）时，因为 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 都没有极限，所以也不收敛；当 $|z| > 1$ 时，$S_n \to \infty$.

综上所述，$\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1} - z^n)$ 当 $|z| < 1$ 和 $z = 1$ 时收敛.

当 $|z| \leqslant r < 1$ 时，级数一致收敛，因为此时，$|z^{k+1} - z^k| \leqslant |z^{k+1}| + |z^k| \leqslant 2r^k$，即在 $|z| \leqslant r < 1$ 内必一致收敛. 但在 $|z| < 1$ 内不一致收敛，因为当 $z = 1 - \frac{1}{n+1}$ 时，$z^n \to e^{-1} \neq 0$. 而若一致收敛到 -1，对充分大的 n 应有 $|z^{k+1} - 1 - (-1)| = |z|^{n+1} < \varepsilon$，即 $|z| < 1$，与收敛到 -1 矛盾.

例 3 讨论下列幂级数在收敛圆周上性态：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{pn}}{n}$ （p 为自然数）.

解 (1) 收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$.

当 $z = 1$ 时，级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散.

当 $|z|=1$ 但 $z\neq 1$ 时，满足例 1 条件，所以级数收敛.

(2) 由柯西 - 哈达玛法，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{|c_n|}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[pk]{\frac{1}{k}}=1$，所以收敛半径 $R=1$.

令 $\zeta=z^p$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{pn}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\zeta^n$，满足例 1 条件. 所以在 $|\zeta|=1$ 上除 $\zeta=1$ 外都收敛. 从而可知，当 $|z|=1,z^p\neq 1$，即 $z\neq e^{i2k\pi/p}\quad(k=0,1,2,\cdots,p-1)$ 时，级数收敛.

例 4　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R，试讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{10}a_nz^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)a_nz^n$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$.

解　(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R；逐项求导得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$，其收敛半径仍为 R；同时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^n$ 的收敛半径也为 R(因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1-1)a_nz^n$). 再用同样方法重复进行 9 次，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{10}a_nz^n$，故收敛半径仍为 R.

(2) 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$，所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(2^n-1)a_n|}=\frac{2}{R}$. 从而知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)a_nz^n$ 的收敛半径为 $\frac{R}{2}$.

(3) 设 $R>0$. 对任 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，$|a_n|\leqslant\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n$，所以 $\frac{|a_n|}{n!}\leqslant\frac{(1/R+\varepsilon)^n}{n!}$. 由比值判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=0$，故收敛半径为 $+\infty$，从而，$\sum\frac{a_n}{n!}z^n$ 的收敛半径也是 $+\infty$.

当 $R=0$ 时，如果 $a_n = n!a^n$，则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n$，收敛半径为 $\frac{1}{|a|}$，即可以取任意正数；如果 $a_n=(n!)^2$，则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$，收敛半径 $R=0$；如果 $a_n=(n!)^{1/2}$，则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^{1/2}}z^n$，收敛半径为 $+\infty$. 从而知，当 $R=0$ 时，$\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ 的收敛半径要根据具体情况确定.

例 5 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 r_1 与 r_2，求下列级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$； (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}z^n \quad (b_n \neq 0)$.

解 设 r_1 和 r_2 都是正实数.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛域为两级数收敛域的公共部分，所以 $R=\min\{r_1, r_2\}$.

(2) 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|}=\frac{1}{R}$，因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n||b_n|} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|},$$

即 $\frac{1}{R} \leqslant \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{r_2}$. 所以 $R \geqslant r_1 r_2$.

(3) 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n/b_n|}=\frac{1}{R}$，因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n/b_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n/b_n|}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|},$$

即 $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n/b_n|} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \Big/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}.$$

所以 $$\frac{1}{R} \geqslant \frac{1/r_1}{1/r_2}, \quad R \leqslant \frac{r_1}{r_2}.$$

例 6 求下列幂级数的收敛半径和收敛圆：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + \mathrm{i}b^n} z^n \quad (a > 0, b > 0)$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$.

解 (1) 因为 $c_n = \mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{i}}{n} = \cos\frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n+1}\right) \Big/ \cos\frac{1}{n} = 1,$$

所以，收敛半径 $R = 1$，收敛圆 $|z-1| < 1$.

(2) 由根值法，有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/|a^n + \mathrm{i}b^n|} = \lim_{n\to\infty} (a^{2n} + b^{2n})^{-1/2n}.$$

因为 $$\max\{a,b\} \leqslant (a^{2n} + b^{2n})^{1/2n} \leqslant 2^{1/2n} \max\{a,b\},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} (a^{2n} + b^{2n})^{1/2n} = \max\{a,b\}.$$

即级数的收敛半径 $R = \max\{a,b\}$. 收敛圆 $|z| < \max\{a,b\}$.

(3) 由比值法，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} = 1,$$

所以，收敛半径 $R = 1$，收敛圆 $|z| < 1$.

(4) 由根值法，有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-\mathrm{i})^n \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right|} = \lim \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{1/\sin\frac{1}{n}}\right]^{-\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}} = e^{-1}.$$

故所求收敛半径为 $R = e$. 收敛圆 $|z| < e$.

例 7　求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ （p 为正整数）；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\pi/n}z^n$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$.

解　(1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$，所以 $R = 1$.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(1+1/n)^n} = \infty$，所以 $R = 0$.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}$，所以，$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = 1$，所以 $R = 1$.

(5) 因为　$c_n = 1/|\ln in|^n = [1/(\ln^2 n + \pi^2/4)]^{n/2}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}[1/(\ln^2 n + \pi^2/4)]^{1/2} = 0,$$

所以 $R = \infty$.

(6) 因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n\cdot\ln(n^{\ln n})} = \lim e^{(\ln n)^2/n} = 1$，

所以 $R = 1$.

一般地，求收敛半径首先想到的是用比值法. 当 c_n 是某个因式的 n 次幂时，我们选用根值法. 当根值法无法求得极限时，可选用柯西 - 哈达玛法.

在解题中，有时可以用求极限的技巧，如题(6) 中的$\sqrt[n]{|c_n|} = (n^{\ln n})^{1/n} = n^{\frac{1}{n}\ln n}$，用洛必达法则易求

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\ln x)^2/x} = 1,$$

所以，$R = 1$.

例 8 求下列级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[3+(-1)^n]^n(z-1)^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$;

(3) $1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2\cdot 2}z^2+\frac{1}{2^2\cdot 3}z^3+\cdots$
$+\frac{z^{2n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^{n-1}}+\frac{z^{2n}}{2^n\cdot 3^n}+\cdots$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$.

解 (1) 因为 $c_n=[3+(-1)^n]^n$ 是振荡的，由柯西 - 哈达玛法，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n}=4.$$

所以，收敛半径 $R=\frac{1}{4}$，收敛圆 $|z-1|<\frac{1}{4}$.

(2) 因为 $c_n=(-1)^n\frac{1}{2n!}$ 振荡，且为缺项级数，用题(1) 的方法，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{1/(2n!)}=0.$$

所以，收敛半径 $R=+\infty$.

(3) 因为 $c_{2n-1}=\frac{1}{2^{n-1}\cdot 3^{n-1}}$, $c_{2n}=\frac{1}{2^n\cdot 3^n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{|c_{2n-1}|}=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n/(2n-1)}3^{(n-1)/(2n-1)}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|c_{2n}|}=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

于是，收敛半径 $R=\sqrt{6}$.

(4) 因为当 $|a|\leqslant 1$ 时，$n-1\leqslant|n+a^n|\leqslant n+1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+a^n|}=1,$$

所以，收敛半径 $R=1$，收敛圆 $|z|<1$.

当 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+a^n|}=|a|$，所以，收敛半径 $R=\dfrac{1}{|a|}$，收敛圆 $|z|<\dfrac{1}{|a|}$.

例 9 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}z^{2n}$.

解 先求收敛半径，再求和函数.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$，故收敛半径 $R=1$. 由逐项积分性质，得

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2},\ |z|<1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right|=2$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^n=2\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}$$

$$=\frac{1}{(1-2z)(1-z)},\quad |z|<\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故收敛半径 $R=1$. 由逐项积分性质，得

$$\int_0^z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{z}{1+z}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}=\left(\frac{z}{1+z}\right)=\frac{1}{(1+z)^2},\ |z|<1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$,故 $R=+\infty$. 由逐项求导性质,得

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$S''(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m}}{(2m)!} \quad (m = n-1).$$

由此得出 $$S''(z) = -S'(z),$$

即有微分方程 $$S''(z) + S'(z) = 0,$$

解得 $S(z) = A\cos z + B\sin z$, A,B 待定.

由 $$f(0) = A = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right]_{z=0} = 1 \Rightarrow A = 1,$$

$$f'(0) = -\sin z + B\cos z = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]_{z=0}$$

$$= 0 \Rightarrow B = 0.$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z,\ R = +\infty.$$

例 10 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}z^{2n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$.

解 这是两个缺项级数,且有 $a_n = 0$,不能直接利用公式求 R. 如同高等数学中缺项级数一样,可直接用达朗贝尔比值法和柯西根值法来求.

(1) 记 $f_n(z) = (-\mathrm{i})^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}z^{2n-1}$,由比值法,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim\frac{(2n+1)2^n|z|^{2n+1}}{(2n-1)2^{2n+1}|z|^{2n-1}} = \frac{1}{2}|z|^2.$$

要$\frac{1}{2}|z|^2<1$级数收敛，故$|z|<\sqrt{2}$，级数绝对收敛. 收敛半径$R=\sqrt{2}$.

(2) 记$f_n(z)=\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z-1|^{n+1}}{n}$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } |z-1|\leqslant 1,\\ \infty, & \text{若 } |z-1|>1.\end{cases}$$

所以，$|z-1|\leqslant 1$时绝对收敛. 收敛半径$R=1$.

例 11 利用幂级数的和函数计算积分

$$\oint_C\left(\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z,\quad C:|z|=\frac{1}{2}.$$

解 在$|z|<\frac{1}{2}$内，$\sum\limits_{n=-1}^{\infty}z^n=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$，所以

$$\oint_C\left(\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_C\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}+0=2\pi\mathrm{i}.$$

二、关于幂级数收敛性的证明

由于幂级数在收敛域内收敛，且一致收敛，其和函数是解析函数，因此，可以利用解析函数的性质来证明幂级数的收敛性与绝对收敛性.

例 12 证明：几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$具有以下性质：

(1) 当$|z|<1$时，级数收敛；

(2) 在$|z|\leqslant r<1$内，级数一致收敛；

(3) 在$|z|<1$内，级数不一致收敛.

证 (1) 当$|z|<1$时，如同高等数学中的情形一样，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1}{1-z}.$$

所以，级数收敛.

(2) 在$|z|\leqslant r<1$内，$|z|^n<r^n$. 而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n$收敛，由魏尔斯

特拉斯判别法，知级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$一致收敛.

(3) 在 $|z|<1$ 内，对无论多大的 n，取 z 为正实数时，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} z^k\right| = \frac{|z|^{n+1}|1-z^p|}{|1-z|} = \frac{z^{n+1}(1-z^p)}{1-z}.$$

令 $p=n$，取 $z=\frac{n}{n+1}<1$，则

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} z^p\right| = \frac{n\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{9}.$$

这是因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，故当 n 充分大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

所以，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 内不一致收敛.

例 13 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径为 R，证明：$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{Re}(a_n)]z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

解 因为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径为 R，而

$$|[\mathrm{Re}(a_n)]z^n| = |\mathrm{Re}(a_n)||z^n| \leqslant |c_n||z^n|,$$

所以由比较判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{Re}(a_n)]z^n$ 收敛.

设$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{Re}(a_n)]z^n$ 的收敛半径为 R_1，则

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{Re}(a_n)} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

即$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{Re}(a_n)]z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

例 14 证明：如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则下列三个幂级数有相同的收敛半径：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}.$$

证　用比值法求三个级数的收敛半径，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{0+1}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

即三个幂级数有相同的收敛半径.

例 15　设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，而 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 发散，证明：$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 1.

证　因为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|=\lambda|z|$，若 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛半径为 1，则 $|z|=\frac{1}{\lambda}$.

现用反证法证 $\lambda=1$.

若 $0<\lambda<1$，则 $|z|>1$. 有 $\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda<1$，即 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 收敛，与假设矛盾.

若 $\lambda>1$，则 $|z|<1$. 从而 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在单位圆周上等于 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$，是收敛的，这与收敛半径的概念矛盾.

综上所述可知，必有 $\lambda=1$，所以 $R=\frac{1}{\lambda}=1$.

例 16　如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在它的收敛圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明：它在收敛圆周所围的闭区域上绝对收敛.

证　在收敛圆周上任取一点 z $(z\neq z_0)$，则有

$$|c_nz^n|=|c_n||z^n|=|c_n||z_0|^n.$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz_0^n$ 在收敛圆周上绝对收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$ 收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 绝对收敛. 依阿贝尔定理知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在收敛圆所围闭

区域上绝对收敛.

例 17 证明:

(1) 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$在区间$0\leqslant z\leqslant 1$上绝对收敛,但不一致收敛.

(2) 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z+n}$在区间$0\leqslant z\leqslant 1$上一致收敛,但不绝对收敛.

证 (1) 当$z=0$时,显然级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$收敛于零.

当$0<z\leqslant 1$时,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{(1+z^2)^n}\right|=z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^n=\frac{z}{1-1/(1+z^2)}=z+\frac{1}{z},$$

故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$绝对收敛. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}=\begin{cases}0, & z=0,\\ z+\frac{1}{z}, & 0<z\leqslant 1.\end{cases}$$

由$\lim\limits_{n\to 0^+}z+\frac{1}{z}=+\infty$可知和函数不连续,所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$在$0\leqslant z\leqslant 1$上不一致收敛.

(2) 当$0\leqslant z\leqslant 1$时,因为

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{z+k}\right|=\frac{1}{z+N}-\frac{1}{z+N+1}+\frac{1}{z+N+2}+\cdots$$
$$<\frac{1}{z+N}\leqslant\frac{1}{N},$$

所以,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$一致收敛.

但是$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}\right|=\frac{1}{z+n}\geqslant\frac{1}{2n}$,所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$在

$0 \leqslant z \leqslant 1$ 上不绝对收敛.

例 18 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 在 $|z| > 1$ 内解析.

证 因为 $|z| > 1$,所以$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-1/z} - 1 = \frac{1}{z-1}.$$

即当 $|z| > 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ 的和函数 $S(z) = \frac{1}{z-1}$. 显然$\frac{1}{z-1}$ 当 $|z| > 1$ 时没有奇点,是解析的.

例 19 证明:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n$$

的和函数 $f(z) = (1+z)^m$.

证 级数的收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\Big/\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m+n}\right| = 1,$$

若 m 为非负整数,则级数仅有有限项不为零,此时 $R = +\infty$. 所以,对任意的 m,级数的和函数 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析. 于是,级数可逐项微分. 当 $|z| < 1$ 时,有

$$\begin{aligned}(1+z)f'(z) &= (1+z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}z^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(n-n+1)}{(n-1)!}(z^{n-1}+z^n)\\ &= m\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}z^{n-1}\right.\\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-2)!}z^{n-1}\right]\end{aligned}$$

$$= m\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!} z^{n-1}\right]$$

$$= mf(z).$$

解微分方程$\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{mf(z)}{1+z}$,得

$$f(z) = C(1+z)^m, \quad C \text{ 为任意常数}.$$

由 $f(0) = 1$,得 $C = 0$. 所以,当 $|z| < 1$,时

$$f(z) = (1+z)^m.$$

例 20 设级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R $(0 < R < +\infty)$,证明:级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1 + z_0^n)c_n z^n$ 的收敛半径为

$$r = \min\left\{R, \frac{R}{|z_0|}\right\}.$$

证 因为$\sum_{n=0}^{\infty}(1 + z_0^n)c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n c_n z^n$, 而$\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z_0^{n+1}}{c_n z_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z_0| = \frac{|z_0|}{R}.$$

于是$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n z^n$ 的收敛半径 $R_1 = \dfrac{R}{|z_0|}$.

由级数和的收敛半径定理知,$\sum_{n=0}^{\infty}(1 + z_0^n)c_n z^n$ 的收敛半径

$$r = \min\left\{R, \frac{R}{|z_0|}\right\}.$$

例 21 设在幂级数 $w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)} z^n$ 中,m 为负整数,证明:对所有的 z,和函数满足微分方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + (1+m)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - w = 0.$$

证 因为幂级数收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)(m+n+1)=+\infty,$$

所以，w 在全平面解析，可逐项微分，即

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}_{n+1}}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}z^{n-1}.$$

故 $z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+(1+m)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-w$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{(n-1)!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

$$+(1+m)\left[\frac{1}{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}\right]$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}-1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(1-m)-(m+n-1)}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}z^{n}$$

$$=0.$$

第三节　泰勒级数

主要内容

1. 泰勒定理

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，当 $|z-z_0|<d$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

成立，其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，$n=0,1,2,\cdots$.

上式称为 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式.

等式的右边称为 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数. 当 $z_0=0$ 时，级数称麦克劳林级数.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析，则使 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的半径 R 就等于从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0 最近一个奇点 α 之点的距离，即 $R=|\alpha-z_0|$.

任何一个解析函数在一点的泰勒级数是惟一的.

2. 直接算出各阶导数后利用泰勒定理求得函数的泰勒级数的方法称为直接展开法.

借助已知函数展开式，利用幂级数的运算性质和分析性质求得函数的泰勒级数的方法称为间接展开法.

3. 常用的幂级数展开式(麦克劳林展开式)

$$\frac{1}{1\mp z}=1\pm z+z^2\pm z^3+\cdots,\quad |z|<1;$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\quad |z|<\infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$|z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$
$$|z| < \infty;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \cdots,$$
$$|z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < 1.$$

其中($(1+z)^\alpha$ 是指主值,α 是复数.

疑 难 解 析

1. 怎样理解泰勒定理中"d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离,当 $|z-z_0|<d$ 时,$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$"这一句话?

答 因为 $f(z)$ 在 D 内解析,z_0 是 D 内一点,而 D 可以是任意一条闭曲线围成的区域,所以 z_0 不一定在 D 的中心,D 也不一定是圆形区域.根据阿贝尔定理,幂级数的收敛区域一定是一个以点 z_0 为中心的圆.所以,当 $|z-z_0|<d$ 时,$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.在收敛圆内,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 绝对收敛,$f(z)$ 解析;在收敛圆外,级数发散.若 α 是 $f(z)$ 的距 z_0 最近的一个奇点,则 α 必在收敛圆周上,即 $d=|\alpha-z_0|$,否则 d 还可以增大.

2. 与函数 $f(z)$ 能展开为幂级数等价的有哪些命题?

答 由泰勒定理知,若 $f(z)$ 解析,则 $f(z)$ 能展开为泰勒级数

(幂级数);由幂级数的收敛性知,幂级数的和函数是解析函数. 因此,以下命题与之等价:

(1) 函数 $f(z)$ 在 D 内每一点都存在一个邻域,函数在此邻域内可以展开为幂级数.

(2) 函数 $f(z)$ 在 D 内解析.

(3) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部与虚部在 D 内可微,且满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(4) $f(z)$ 在 D 内连续,并对 D 内的任何闭曲线 C,都有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

因此,若 $f(z)$ 在 D 内满足其中一条,自然可以得到其它几个结论.

3. 复变函数展为幂级数的条件与实变函数情形有什么不同?

答 复变函数展为幂级数的条件与实变函数情形相比较,相对要弱一些. 这表现为以下两点.

一是实变函数要求存在任意阶导数,而这对于一般函数是难以达到的. 复变函数只要求 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析,而这是易于实现的. 这是因为对于复变函数来说,$f(z)$ 解析就能保证函数无限次可微与各阶导数的连续性. 二是实变函数还要证明余项趋于零,复变函数则不必,证明余项趋向于零是比较困难和复杂的. 正因为这两点,所以复变函数展为泰勒级数的应用范围就比实变函数情形要大得多.

4. 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 当 x 为任何实数时都有确定的值,但它的泰勒展开式 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$ 却只当 $|x|<1$ 时才成立. 这是为什么?

答 我们知道,实数只是复数的特殊情形. 当我们在复数范

围内考虑函数$\frac{1}{1+z^2}$时，在复平面内存在两个奇点 $z=\pm\mathrm{i}$，而这两个奇点都在函数$\frac{1}{1+z^2}$的展开式 $1-z^2+z^4-\cdots$ 的收敛圆周 $|z|=1$ 上，所以级数的收敛半径只能等于1. 函数$\frac{1}{1+x^2}$中 $z=x$(实数) 的情形，也必须满足上述要求，所以，仅当 $|x|<1$ 时，才有$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$.

方法、技巧与典型例题分析

在将函数展开为幂级数的时候，首先要注意的是幂级数的形式. 若展开为泰勒级数形式，则提法为：在 $z=z_0$ 展开为幂级数或展开为$(z-z_0)$的幂级数. 若展开为麦克劳林级数形式，则提法为：在 $z_0=0$ 展开为幂级数或展开为 z 的幂级数. 其次是确定收敛半径，有时要找出奇点来协助确定. 最后是选择哪种展开方法，用间接展开法时，除注意技巧(见例题) 外还应记清所利用的已知函数展开式的形式和收敛半径；用直接展开法时，要注意运用求导的技巧和归纳通项的形式.

一、直接展开法的运用

例 1 将下列函数在指定点展开为幂级数：

(1) $\sin\frac{1}{1-z}$, $z_0=0$;　　(2) $\tan z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$;

(3) $\frac{1}{3-2z}$, $z_0=-1$;　　(4) $\ln(1+\mathrm{e}^{-z})$, $z_0=0$.

解 (1) 因为 $z=1$ 为奇点，所以 $R=1$. 又

$$\left(\sin\frac{1}{1-z}\right)\bigg|_{z=0}=1,$$

$$\left(\sin\frac{1}{1-z}\right)'=\cos\frac{1}{1-z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)^2,$$

$$\left(\sin\frac{1}{1-z}\right)'' = \left(-\sin\frac{1}{1-z}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)^4$$

$$+\cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^3},$$

$$\left(\sin\frac{1}{1-z}\right)''' = -\cos\frac{1}{1-z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)^6 - \sin\frac{1}{1-z}\cdot\frac{4}{(1-z)^5}$$

$$-\left(\sin\frac{1}{1-z}\right)\cdot\frac{2}{(1-z)^5}+\cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^4}.$$

代入 $z=0$,即得各阶导数值. 于是,有展开式

$$\sin\frac{1}{1-z} = \sin 1 + \cos 1\cdot z + \frac{1}{2}(-\sin 1 + 2\cos 1)z^2$$

$$+\frac{1}{6}(5\cos 1 - 6\sin 1)z^3 - \cdots,\quad R=1.$$

(2) 因为 $z=\frac{\pi}{2}$ 为奇点,所以 $R=\frac{\pi}{4}$. 又

$$\tan\frac{\pi}{4}=1,$$

$$(\tan z)' = \sec^2 z,\quad (\tan z)'\Big|_{z=\pi/4}=2,$$

$$(\tan z)'' = 2\sec^2 z\tan z,\quad (\tan z)''\Big|_{z=\pi/4}=4,$$

$$(\tan z)''' = 2(2\sec^2 z\tan^2 z + \sec^4 z),\ (\tan z)'''\Big|_{z=\pi/4}=16,$$

于是,有展开式

$$\tan z = 1 + 2\left(z-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,\quad R=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 因为 $z=\frac{3}{2}$ 为奇点,所以 $R=\frac{5}{2}$. 又

$$\frac{1}{3-2z}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{5},$$

$$\left(\frac{1}{3-2z}\right)' = \frac{2}{(3-2z)^2}, \quad \left(\frac{1}{3-2z}\right)'\Big|_{z=-1} = \frac{2}{5^2},$$

$$\left(\frac{1}{3-2z}\right)'' = \frac{2^2 \cdot 2!}{(3-2z)^3}, \quad \left(\frac{1}{3-2z}\right)''\Big|_{z=-1} = \frac{2^2 \cdot 2!}{5^3},$$

$$\left(\frac{1}{3-2z}\right)''' = \frac{2^3 \cdot 3!}{(3-2z)^4}\left(\frac{1}{3-2z}\right)'''\Big|_{z=-1} = \frac{2^3 \cdot 3!}{5^4}.$$

于是,有展开式

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2}(z+1) + \frac{2^2}{5^3}(z+1)^2$$

$$+ \cdots + \frac{2^n}{5^{n+1}}(z+1)^n + \cdots, \quad R = \frac{5}{2}.$$

(4) 因为 $\ln(1+e^{-z}) = \ln\frac{1+e^z}{e^z}$,奇点为

$$z_k = (2k+1)\pi i \ (k = 0, \pm 1, \cdots),$$

所以 $R = \pi$. 又

$$\ln(1+e^{-z})\Big|_{z=0} = \ln 2,$$

$$[\ln(1+e^{-z})]' = \frac{1}{1+e^z}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2},$$

$$[\ln(1+e^{-z})]'' = \frac{e^z}{(1+e^z)^2}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2^2},$$

$$[\ln(1+e^{-z})]'' = \frac{e^z}{(1+e^z)^3}\Big|_{z=0} = 0,$$

$$[\ln(1+e^{-z})]^{(4)} = \frac{e^z(1-4e^z+e^{2z})}{(1+e^z)^4}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2^3},$$

于是,有展开式

$$\ln(1+e^{-z}) = \ln 2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2!2^2}z^2 - \frac{1}{4!2^3}z^4 + \cdots, \quad R = \pi.$$

例 2 用直接展开法展开 $f(z) = e^z \sin z$ 为麦克劳林级数.

解 因为 $f(z)$ 在全平面解析,所以 $R = +\infty$. 又

$$f(0) = 0,$$

$$f'(z) = e^z\sin z + e^z\cos z = \sqrt{2}e^z\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(z) = (\sqrt{2})^2 e^z\sin\left(z + \frac{2\pi}{4}\right),$$

……

$$f^{(n)}(z) = (\sqrt{2})^n e^z\sin\left(z + \frac{n\pi}{4}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4},$$

于是,$f(z)$ 的麦克劳林展开式为

$$e^z\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n,\quad R = +\infty.$$

例 3 将下列函数展开为幂级数:

(1) $f(z) = \left(3 + \frac{z^2}{2}\right)\sin z,\ z_0 = 0$;

(2) $f(z) = \frac{1}{1+z^2},\ z_0 = 1$.

解 (1) 因为 $f(z)$ 在全平面解析,所以 $R = +\infty$. 又

$$f(z) = \left(3 + \frac{z^2}{2}\right)\sin z,\quad f(0) = 0,$$

$$f'(z) = z\sin z + \left(3 + \frac{z^2}{2}\right)\cos z,\quad f'(0) = 3,$$

$$f''(z) = 2z\cos z - 2\sin z - \frac{z^2}{2}\sin z,\quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(z) = -3z\sin z - \frac{z^2}{2}\cos z,\quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(z) = -3\sin z - 4z\cos z + \frac{z^2}{2}\sin z,\quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(z) = -7\cos z + 5z\sin z + \frac{z^2}{2}\cos z,\quad f^{(5)}(0) = -7.$$

于是,$f(z)$ 关于 z 的幂级数展开式为

$$\left(3+\frac{z^2}{2}\right)\sin z = 3z - \frac{7}{5!}z^5 + \cdots,\quad R = +\infty.$$

(2) 因为 $z = \pm\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的奇点，所以 $R = \sqrt{2}$. 又

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},\quad f(1) = \frac{1}{2},$$

$$f'(z) = \frac{-2z}{(1+z^2)^2},\quad f'(1) = -\frac{1}{2},$$

$$f''(z) = \frac{-2+6z^2}{(1+z^2)^3},\quad f''(1) = \frac{1}{2},$$

$$f'''(z) = \frac{24z-24z^3}{(1+z^2)^4},\quad f'''(1) = 0,$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{24-240z+120z^4}{(1+z^2)^5},\quad f^{(4)}(1) = -3,$$

于是，$f(z)$ 在 $z=1$ 的泰勒级数为

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{4}(z-1)^2 - \frac{3}{4!}(z-1)^4 + \cdots,\ R = \sqrt{2}.$$

二、间接展开法的运用

一个函数的泰勒级数是惟一的，但展开函数为泰勒级数的方式却是多种多样的. 为了节省篇幅，我们在下面的例题中，每题只给出一种解法，而且不一定是最佳的，只是介绍每一种解法的运用过程和应注意的问题，供读者学习时参考. 读者可利用这些方法寻求最佳解法.

1. 常用代换法 $\left(\text{即利用代换}\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1\right)$

使用这一方法，特别要注意 $\dfrac{1}{1-z}$ 时，$|z| < 1$ 这一点. 因而对 $\dfrac{1}{1-f(z)}$，应有 $|f(z)| < 1$.

例 4 将 $f(z) = \dfrac{1}{3-2z}$ 分别展开为 z 和 $z+1$ 的幂级数，并

求出收敛半径.

解 (1) 展开为 z 的幂级数,即

$$\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2z/3}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}z\right)^n,$$

而 $\left|\frac{2}{3}z\right|<1$,即 $|z|<\frac{3}{2}$.

(2) 展开为 $(z+1)$ 的幂级数,即

$$\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-2(z+1)/5}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n(z+1)^n,$$

而 $\left|\frac{2}{5}(z+1)\right|<1$,即 $|z+1|<\frac{5}{2}$.

例 5 将 $f(z)=\frac{1}{4-3z}$ 在 $z_0=1+\mathrm{i}$ 展开为泰勒级数.

解 因为 $z=\frac{4}{3}$ 是 $f(z)$ 的奇点,到 $z_0=1+\mathrm{i}$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$,所以 $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-3z}&=\frac{1}{4-3[z-(1+\mathrm{i})]-3-3\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{1-3\mathrm{i}-3[z-(1+\mathrm{i})]}\\&=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-3[z-(1+\mathrm{i})]/(1-3\mathrm{i})}\\&=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{3[z-(1+\mathrm{i})]}{1-3\mathrm{i}}\right\}^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n[z-(1+\mathrm{i})]^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}.\end{aligned}$$

2. 代换法(复合变换法)

将 $f(z)$ 变形为含所需因式的形式,然后利用已知函数展开式求得幂级数.

例 6 求 $\sin\frac{z}{1-z}$ 关于 z 的幂级数.

解 由 $\sin z$ 的展开式,得

$$\sin\frac{z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n+1}$$

$$=\left(\frac{z}{1-z}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n+1}+\cdots$$

$$=(z+z^2+z^3+\cdots)-\frac{1}{3!}(z+z^2+z^3+\cdots)^3+\cdots$$

$$=z+z^2+\left(1-\frac{1}{3!}\right)z^3+\left(1-3\frac{1}{3!}\right)z^4+\cdots$$

$$=z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\frac{1}{2}z^4+\cdots.$$

因为 $z=1$ 是函数的一个奇点，所以 $|z|<1$.

例 7 求 $\sqrt{z+\mathrm{i}}$ 在 $|z|<1$ 内的展开式.

解 利用 $(1+z)^a$ 的展开式

$$\sqrt{z+\mathrm{i}}=\sqrt{\mathrm{i}}\cdot\sqrt{1+z/\mathrm{i}}=\sqrt{\mathrm{i}}\cdot\left(1+\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^{1/n}$$

$$=\sqrt{\mathrm{i}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{z}{\mathrm{i}}+\frac{1/2(1/2-1)}{2!}\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\sqrt{\mathrm{i}}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots\right),\ |z|<1.$$

例 8 求 $\cos^2z$ 的麦克劳林级数.

解 利用 $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,|z|<+\infty$，得

$$\cos^2z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\cdots\right]$$

$$=1-\frac{2z^2}{2!}+\frac{2^3z^4}{4!}-\frac{2^5z^6}{6!}+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

3. 部分分式法

当 $f(z)$ 为有理分式函数时，可以将 $f(z)$ 分解为部分分式，然后再利用已知函数的展开式求得所需幂级数.

例 9 将 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 展开为 $(z-2)$ 的泰勒级数.

解 $f(z)$ 的奇点为 $z=-1$ 和 -2，所以 $R=3$.

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{-1}{z+1}+\frac{2}{z+2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1+(z-2)/4}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(z-2)}{3}\right]^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(z-2)}{4}\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2\cdot 4^n},\quad R=3.$$

例 10 将 $f(z)=\dfrac{4z^2+26z+36}{(z+3)^3(z+2)}$ 展开为 z 的幂级数.

解 $f(z)$ 的奇点为 $z=-2,z=-3$,所以 $R=2$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}+\frac{4}{z+2},$$

而 $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+z/2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z}{2}\right)^n,\quad |z|<2,$

$$\frac{1}{(z+3)^2}=\left(\frac{-1}{z+3}\right)'=-\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n\right]'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n+1}}z^{n-1},\quad |z|<\varepsilon,$$

所以,$f(z)$ 关于 z 的幂级数为

$$\frac{4z^2+26z+36}{(z+3)^2(z+2)}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n+1}}z^{n-1}.$$

4. 微分方程法

利用被展开函数的导数与函数的关系建立关于函数的微分方程,通过对微分方程逐次求导解出各阶导数,然后得出已知函数的幂级数,一般适用于难以找到可利用展开式而其导数又保留原来函数因式的一些函数.

例 11 将 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开为 z 的幂级数.

解 $f(z)$ 的惟一奇点为 $z=-1$,所以 $R=1$. 因为 $f'(z)=$

$\frac{z}{1+z}f(z)$，于是建立微分方程

$$(1+z)f'(z)-zf(z)=0.$$

对微分方程进行逐项求导，得

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0,$$
$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)=0,$$
$$\cdots\cdots$$

由于 $f(0)=1$，顺次代入各方程，逐个解得

$$f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\ \cdots,$$

所以，$f(z)=\frac{e^z}{1+z}$ 的麦克劳林展开式为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^2+\cdots,\quad |z|<1.$$

例 12 将 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 展开为 z 的幂级数.

解 函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 只有惟一奇点 $z=1$，所以 $R=1$. 令 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$，则 $f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}f(z)$. 得关于 $f(z)$ 的微分方程

$$(1-z)^2f'(z)-f(z)=0.$$

对微分方程逐次求导，得

$$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0,$$
$$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0,$$
$$\cdots\cdots$$

由于 $f(0)=e$，自上至下逐个方程代入，解得

$$f'(0)=e,\ f''(0)=3e,\ f'''(0)=13e,\ \cdots,$$

所以，$e^{\frac{1}{1-z}}$ 的麦克劳林展开式为

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right),\quad |z|<1.$$

5. 逐项求导法

当函数可以表示为已知展开式的函数的导数时，由幂级数可

以在收敛圆内逐项可导的性质即能求得函数的幂级数展开式.

例 13 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $z_0=-1$ 的泰勒展开式.

解 $z=0$ 为 $f(z)$ 惟一奇点,所以 $R=1$.

$$\frac{1}{z^2}=\left(\frac{-1}{z}\right)'=\left[\frac{1}{1-(z+1)}\right]'$$
$$=[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots]'$$
$$=1+2(z+1)+3(z+2)+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n,\ |z|<1.$$

例 14 求 $f(z)=\dfrac{1}{(a-z)^n}$ 的麦克劳林展开式.

解 $z=a$ 是 $f(z)$ 的惟一奇点,所以 $R=a$.

$$\frac{b}{a-z}=b\left(\frac{1}{a-z}\right)=\frac{b}{a}\,\frac{1}{1-z/a}=\frac{b}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$
$$=\frac{b}{a}\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\cdots\right),$$
$$\frac{b}{(a-z)^2}=b\left(\frac{1}{a-z}\right)'=\frac{b}{a}\left[\sum\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]'$$
$$=\frac{b}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}=\frac{b}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n$$
$$=\frac{b}{a^2}\left(1+2\,\frac{z}{a}+3\,\frac{z^2}{a^2}+\cdots\right),$$
$$\frac{b}{(a-z)^3}=\frac{b}{2}\left[\frac{1}{(a-z)^2}\right]'=\frac{b}{2a^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]'$$
$$=\frac{b}{2a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{z}{a}\right)^n\cdot\frac{1}{a},$$

……

$$\frac{b}{(a-z)^{k+1}}=\frac{b}{k}\left[\frac{1}{(a-z)^k}\right]'$$

$$= \frac{b}{ka^k}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+k-1)}{(k+1)!}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]'$$

$$= \frac{b}{a^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+k)}{k!}\left(\frac{z}{a}\right)^n, \quad |z| < |a|.$$

6. 逐项求积法

当所给函数为某已知展开式的函数的积分时，可利用幂级数在收敛圆内可以逐项求积的性质，求得所给函数的幂级数.

例 15 将 $\arcsin z$ 在 $z = 0$ 展开为幂级数.

解 因为

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z,$$

所以 $z = \pm 1$ 为奇点，$R = 1$.

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = \int_0^z (1-z^2)^{-1/2}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$$

$$= z + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}z^5 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

例 16 求 $\ln(1+z^2)$ 的麦克劳林级数.

解 因为 $[\ln(1+z^2)]' = \dfrac{2z}{1+z^2} = 2z\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$，所以 $z = \pm \mathrm{i}$ 为奇点，$R = 1$.

$$\ln(1+z^2) = \int_0^z 2z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\mathrm{d}z$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+2} z^{2n+2}, \quad |z| < 1.$$

7. 幂级数乘法

当所给函数可以分解为几个已知展开式的函数的乘积时，可以利用幂级数的乘法去求幂级数展开式. 乘积的项一般用柯西乘

积来确定，但很难写出其通项，而且计算比较繁冗.

例 17 求 $e^{z^2}\sin z^2$ 的麦克劳林展开式.

解 $$e^{z^2}=1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\frac{1}{3!}z^6+\cdots,\quad R=+\infty,$$

$$\sin z^2=z^2-\frac{1}{3!}z^6+\frac{1}{5!}z^{10}+\cdots,\quad R=+\infty,$$

所以

$$\begin{aligned}e^{z^2}\sin z^2&=\left(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots\right)\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\cdots\right)\\&=z^2+z^4+\frac{z^6}{3}+\cdots,\quad R=+\infty.\end{aligned}$$

例 18 求 $e^z\ln(1+z)$ 在点 $z=0$ 的幂级数.

解 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad R=+\infty.$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots,\quad R=1.$$

所以

$$\begin{aligned}e^z\ln(1+z)&=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right).\\&=z+\left(1-\frac{1}{2}\right)z^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)z^3+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(n-k)!}\right)z^{n+1},\quad |z|<1.\end{aligned}$$

8. 幂级数除法

当 $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 时，若 $g(z)$ 和 $h(z)$ 均在 z_0 可以展开为泰勒级数，且 $h(z_0)\neq 0$，则可利用长除法求 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数. 计算时，一般按升幂排列. 长除法计算比较麻烦，尽量不采用.

例 19 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$ 的麦克劳林展开式.

解 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,\quad R=+\infty.$$

列出计算式如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+\frac{z^2}{2!}-\frac{2z^3}{3!}+\frac{9z^4}{4!}-\frac{44z^5}{5!}+\cdots \\
\hline
1+z & 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots \\
 & 1+z \\
\hline
 & \qquad \frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!} \\
 & \qquad \frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{2!} \\
\hline
 & \qquad\qquad -\frac{2}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4 \\
 & \qquad\qquad -\frac{2}{3!}z^3-\frac{2}{3!}z^4 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad \frac{9}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5 \\
 & \qquad\qquad\qquad \frac{9}{4!}z^4+\frac{9}{4!}z^5 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{44}{5!}z^5+\cdots \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{44}{5!}z^5+\cdots
\end{array}
$$

所以，$\frac{e^z}{1+z}$ 的麦克劳林展开式为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{z^2}{2}-\frac{2}{3!}z^3+\frac{9}{4!}z^4-\frac{44}{5!}z^5+\cdots,\quad |z|<1.$$

例 20 展开 $\tan z$ 为 z 的幂级数.

解 因为 $z=\frac{\pi}{2}$ 为最近奇点，所以 $R=\frac{\pi}{2}$.

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\cdots}{1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\cdots}$$

$$= z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots \quad (\text{计算式略}).$$

9. 待定系数法

待定系数法是先设定要展开的函数的幂级数的形式与系数，然后利用恒等式比较解出各系数的值，关键是构造一个恒等式.

例 21 将 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ 展开为 z 的幂级数.

解 设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，由 $(e^z - 1)f(z) = z$，而

$$e^z - 1 = z + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

建立恒等式

$$z = (c_0 + c_1 + c_2 z^2 + \cdots)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= c_0 z + \left(\frac{1}{2}c_0 + c_1\right)z^2 + \left(\frac{1}{3!}c_0 + \frac{1}{2!}c_1 + c_2\right)z^3 + \cdots,$$

比较两边系数，得

$$\begin{aligned}
&c_0 = 1, && c_0 = 1 \\
&\frac{1}{2}c_0 + c_1 = 0, && c_1 = -\frac{1}{2} \\
&\frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + c_2 = 0, && c_2 = \frac{1}{12} \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}$$

又，$f(z)$ 的奇点为 $2k\pi i\ (k = 0, \pm 1, \cdots)$，所以 $R = 2\pi$.

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \cdots, \quad |z| < 2\pi.$$

例 22 写出 $\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$ 的麦克劳林展开式.

解 函数 $\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$ 距原点最近的奇点为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$，所以 $R = \dfrac{\pi}{2}$.

设 $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{\cos z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，则由 e^{z^2} 和 $\cos z$ 的展开式建立恒等

式，有

$$\left(1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots\right)$$

$$=(c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)$$

$$=c_0+\left(c_2+\frac{c_0}{2}\right)z^2+\left(c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!}\right)z^4+\cdots.$$

比较同次幂系数，得

$$c_0=1,\ c_2=\frac{3}{2},\ c_4=\frac{29}{24},\ \cdots,$$

故
$$\frac{e^{z^2}}{\cos z}=1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\cdots,\quad |z|<\pi.$$

注　偶函数展开为的幂级数只含偶次项. e^{z^2} 和 $\cos z$ 都是偶函数，因此$\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$也是偶函数，其系数只需设 $c_0,c_2,c_4,\cdots$ 即可.

10. 组合法

将两个一起可以构成一个复函数的函数，利用欧拉公式组合起来，再展开为幂级数，然后根据实部、虚部间对应关系，求得所需展开式.

例 23　将 $e^z\sin z$ 展为 z 的幂级数.

解　因为 $e^z\sin z$ 和 $e^z\cos z$ 均在复平面上解析，将它们分别作为实部与虚部，利用欧拉公式，得

$$e^z\cos z+ie^z\sin z=e^z(\cos z+i\sin z)=e^{(1+i)z}$$

$$=e^{\sqrt{2}z\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sqrt{2})^n\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)z^n.$$

同理
$$e^z\cos z-ie^z\sin z=e^{(1-i)z}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)z^n.$$

将两式相减后除以 2，即得

$$e^z\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{z^n}{n!},\quad |z|<+\infty.$$

将两式相加后除以 2，即得

$$e^z\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{z^n}{n!},\quad |z|<+\infty.$$

实际上，一个函数展开为幂级数的方法是多种多样的，一题多解的情况更为常见.

如 $e^z\sin z$，还可用幂级数乘法展开：

$$\begin{aligned}e^z\sin z &= \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots\right)\\ &= z+z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{30}z^5+\cdots,\quad |z|<+\infty,\end{aligned}$$

化为指数函数，有

$$\begin{aligned}e^z\sin z &= e^z\,\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = \frac{1}{2i}[e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}]\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^2\,\frac{\sin(n\pi/4)}{n!}z^n.\end{aligned}$$

用直接展开法，有

$$f'(z) = \sqrt{2}\,e^z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right),\qquad f'(0) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4},$$

$$f''(z) = (\sqrt{2})^2 e^z\sin\left(z+\frac{2\pi}{4}\right),\quad f''(0) = (\sqrt{2})^2\sin\frac{2\pi}{4},$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(z) = (\sqrt{2})^n e^z\sin\left(z+\frac{n\pi}{4}\right),\ f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

所以 $$e^z\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n\,\frac{\sin(n\pi/4)}{n!}z^n,\quad |z|<+\infty.$$

三、利用幂级数展开式证明问题

一些关于解析函数的命题、不等式或等式，由于函数解析与函数可以展开为幂级数等价这一观念，可以利用函数的幂级数来证.

例 24　利用 e^z 的麦克劳林级数，证明：

(1) 对任一复数 z，有 $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}$，

(2) 当 $0 < |z| < 1$ 时，$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$.

证　(1) 由 e^z 的麦克劳林级数知

$$|e^z - 1| = \left|z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right| \leqslant |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z^3|}{3!} + \cdots$$

$$= e^{|z|} - 1 = |z|\left(1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$\leqslant |z|\left(1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots\right) = |z|e^{|z|}.$$

(2) 当 $0 \leqslant |z| < 1$ 时，有

$$|e^z - 1| \leqslant |z|\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = (e^1 - 1)|z| < \frac{7}{4}|z|,$$

$$|e^z - 1| > |z|\left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots\right)$$

$$= |z|\left[3 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)\right]$$

$$= (3 - e^1)|z| > \frac{1}{4}|z|.$$

例 25　试证黎曼函数

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n} \quad (\ln n > 0)$$

在点 $z = 2$ 的邻域内可展开为泰勒级数，并求收敛半径.

证　因为 $|e^{-z\ln n}| = \frac{1}{n^x}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n}$ 在 $\mathrm{Re}(z) = x > 1$ 时收敛.

对任意的 $x_0 = \mathrm{Re}(z_0) > 1$，当 $\mathrm{Re}z > x_0$ 时，$|e^{-z\ln n}| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_0}}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ 是收敛的 $(x_0 > 1)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n} = \zeta(z)$ 在 $\mathrm{Re}(z) \geqslant x_0$ 上一致收敛，$\zeta(z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(z) > 1$ 内解析. 于是，在点 $z = 2$ 的邻域内可展开为泰勒级数，即

$$\zeta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(n)}(2)}{n!}(z-2)^n.$$

由维尔斯特拉斯定理，有

$$\zeta^{(n)}(z)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}e^{-z\ln k}\right)^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n(\ln k)^n e^{-z\ln k},$$

即
$$\zeta^{(n)}(2)=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln k)^n}{k^2}.$$

所以

$$\zeta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln k)^n}{k^2}\right)(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n.$$

其中
$$c_n=\frac{1}{n!}(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln k)^n}{k^2}.$$

$$R=|2-1|=1.$$

例 26 若 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 解析，且 $f(M)|\leqslant M$，证明：

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\right|\leqslant\frac{M(z-a)^{n+1}}{R^n(R-|z-a|)}$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

证 因为 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 解析，所以有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

于是
$$\left|f(z)-\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\right| \quad \text{（利用柯西不等式）}$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{M}{R^k}(z-a)^k$$
$$=\frac{M|z-a|^{n+1}}{R^n(R-(z-a))},\quad |z-a|<R.$$

例 27 非波那契(Fibonacci)数列 $\{c_n\}$ 定义为：$c_0=0,c_1=1,c_2=1,\cdots,c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$，证明：c_n 是一有理函数的泰勒级数的系数，并确定 c_n 的表达式.

证 因为除 c_0 外，$c_n > 0$，所以数列 $\{c_n\}$ 单调增加，且 $c_n \leqslant 2c_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$，于是

$$0 < c_n \leqslant 2c_{n-1} \leqslant 2^2 c_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant 2^{n-1}c_1 = 2^{n-1} \quad (n > 1),$$

即 $\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant 2$，由根值法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛半径 $R \geqslant \frac{1}{2}$.

设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，$|z| < R$，则

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n,$$

又 $$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - (c_0 + c_1 z) = f(z) - z,$$

而 $$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^{n-2} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = z^2 f(z),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^{n-1} = z f(z)..$$

于是 $f(z) - z = zf(z) + z^2 f(z) \Longrightarrow f(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$，
所以，$f(z)$ 是 z 的一个有理函数.

展开 $f(z)$ 可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{[1 - z(1 + \sqrt{5})/2][1 - z(1 - \sqrt{5})/2]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1 - z(1 + \sqrt{5})/2} - \frac{1}{1 - z(1 - \sqrt{5})/2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right] z^n \end{aligned}$$

得 $$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n = 0,1,2,\cdots.$$

收敛半径等于 $f(z)$ 的奇点到原点的最短距离，即

$$R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

例 28 若 $f(z)$ 在全平面解析（此时 $f(z)$ 称为整函数），且

$\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{M(r)}{r^n}<\infty\left(M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|\right)$,则 $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式.

证 因为 $f(z)$ 解析,所以

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\ |R|<+\infty.$$

由柯西不等式

$$|c_k|\leqslant\frac{M(r)}{r^k},\ k=0,1,2,\cdots,$$

当 $k\geqslant n+1$ 时,令 $k=n+p\ (p>1)$,有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{r^k}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^p}\cdot\frac{M(r)}{r^n}=0.$$

所以,当 $k\geqslant n+1$ 时 $c_k=0$,即 $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式.

例 29 若 $f(z)$ 为整函数,整数 $N>0$,且 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^N}=k>0$,则 $f(z)$ 是关于 z 的 n 次多项式.

证 因为 $f(z)$ 是整函数,所以

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad |z|<+\infty.$$

令 $$g(z)=\frac{f(z)}{z^N}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{c_n}{z^{N-n}}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{N+k}z^k,$$

则 $g(z)$ 也是整函数,且 $g(0)=c_N$.

又,$0<k=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^N}=\lim\limits_{z\to\infty}g(z)$,所以 $|g(z)|\leqslant M,|z|<\infty$. 由刘维尔定理,$g(z)=g(0)=c_N$. 所以

$$f(z)=z^N\sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{z^{N-n}}=\sum_{k=0}^{N}c_kz^k.$$

例 30 为什么在区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开为 z 的幂级数时,展开式的系数都是实数?

解 因为当 z 取实数值时,$f(z)$ 与 $f(x)$ 的泰勒级数展开式是完全一致的. 而在 $|x|<R$ 内,$f(x)$ 的展开式系数是实数,所以

在 $|z|<R$ 内，$f(z)$ 的幂级数展开式系数也是实数.

例 31 勒襄德(Legendre) 多项式定义为如下展开式的系数 $P_n(\alpha)$：

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\alpha)z^n,$$

求 $P_1(\alpha),P_2(\alpha),P_3(\alpha),P_4(\alpha)$.

解 利用 $(1+z)^m$ 的展开式展开 $(1-2\alpha z+z^2)^{1/2}$，有

$$\begin{aligned}(1-2\alpha z+z^2)^{-1/2}&=[1-(2\alpha z-z^2)]^{-1/2}\\&=1+\frac{1}{2}(2\alpha z-z^2)+\frac{3}{8}(2\alpha z-z^2)^2\\&\quad+\frac{15}{48}(2\alpha z-z^2)^3+\frac{35}{128}(2\alpha z-z^2)^4+\cdots\\&=1+\alpha z+\frac{1}{2}(3\alpha^2-1)z^2+\frac{1}{2}(5\alpha^3-3\alpha)z^3\\&\quad+\frac{1}{8}(35\alpha^4-30\alpha^2+3)z^4+\cdots,\end{aligned}$$

所以 $$P_1(\alpha)=\alpha,\quad P_2(\alpha)=\frac{1}{2}(3\alpha^2-1),$$

$$P_3(\alpha)=\frac{1}{2}(5\alpha^3-3\alpha),\quad P_4(\alpha)=\frac{1}{8}(35\alpha^4-30\alpha^2+3).$$

例 32 契比雪夫(Chebyshev) 多项式 $T_n(z)$ 被定义为下列泰勒展开式中 w^n 的系数：

$$\frac{4-w^2}{4-4zw+w^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(z)w^n,$$

证明： $$T_n(z)=2^{1-n}\cos(n\arccos z).$$

证 令 $z=\cos\zeta$，当 $|w|$ 足够小时，有

$$\begin{aligned}\frac{4-w^2}{4-4zw+w^2}&=-1+\frac{1}{1-e^{-i\zeta}\cdot w/2}+\frac{1}{1+e^{i\zeta}\cdot w/2}\\&=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}e^{-i\zeta}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}e^{i\zeta}\right)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\zeta}{2^{n-1}}w^n.\end{aligned}$$

对照题中定义式的右边，即可确认

$$T_n(z) = 2^{1-n}\cos(n\arccos z).$$

第四节 洛朗级数

主要内容

1. 一个在某一圆环域内解析的函数展开的具有正、负幂项的级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$
$$= \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

称为洛朗(Laurent)级数. 一个函数在某一圆环域内的洛朗级数是惟一的.

2. 若对于点 z，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 都收敛，则称洛朗级数收敛. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 称为解析(正则)部分，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 称为主要部分.

洛朗级数 $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_0(z-z_0)^n$ 的收敛域是一个圆环域：$r < |z-z_0| < R$. 其和函数 $f(z)$ 是圆环域内的解析函数，且

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

其中 C 是圆环域内的绕 z_0 的任何一条简单闭曲线. c_n 与 z 无关.

圆环域可以是去掉圆心的圆域 $0 < |z| < R$，也可以是去掉 ∞

点的一个圆的外部$R<|z|<\infty$. 洛朗级数在圆环域内绝对收敛，且在此圆环域内任意闭域上(内闭)一致收敛.

3. 洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$在收敛圆环域内，和函数是解析函数，而且可以逐项求积和逐项求导.

4. 函数$f(z)$的洛朗级数展开

将函数$f(z)$展开为洛朗级数的方法有：

(1) 直接展开法　利用系数公式

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

求得c_n，然后写出洛朗级数.

(2) 间接展开法　利用函数的泰勒展开式，通过代数运算、代换、逐项求导和逐项积分等各种方法求得函数的洛朗级数.

疑难解析

1. 洛朗级数与泰勒级数有何关系?

答　洛朗级数与泰勒级数之间的关系是一个既一般又特殊的关系，也就是说，泰勒级数是一个特殊的不含负幂项的洛朗级数. 洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$在圆环域$r<|z-z_0|<R$上收敛，当$z_0=0, r=0$时，$c_{-n}=0$，洛朗级数就退化为泰勒级数了.

在一般情况下，洛朗级数的解析(正则)部分就是一个普通幂级数. 而且，可以利用一些函数的泰勒展开式来求函数的洛朗级数. 因此可知，洛朗级数与泰勒级数存在着密切的相依关系.

2. 在洛朗定理中，系数$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$. 为什么不能像泰勒定理那样，利用高阶导数公式使得$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$呢?

答 在泰勒定理中，因为 $f(z)$ 在 z_0 的邻域中解析，所以可以在收敛圆域内应用高阶导数公式，求得

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

但在洛朗定理中，却会是：

(1) 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f^{(n)}(z_0)$ 不存在.

(2) 若 z_0 不是 $f(z)$ 的奇点，因而 $f^{(n)}(z_0)$ 存在. 但在 $|z - z_0| < R$ 内可能还有奇点，此时积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$ 也不等于 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$.

(3) 仅当 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内处处解析，则由于 $(z - z_0)^{n-1}f(2)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在 C 内处处解析，由基本定理，有

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (\zeta - z_0)^{n-1}f(\zeta)d\zeta = 0.$$

这时，洛朗级数成为泰勒级数.

3. 试说明奇点与洛朗级数的关系.

答 奇点有两类，一类是 $f(z)$ 的奇点，一类是 $f(z)$ 的洛朗级数的负幂项的奇点. 我们分别进行讨论.

若函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内只有一个奇点 z_0，则 $f(z)$ 可以在 $0 < |z - z_0| < R$ 内展开为洛朗级数. 其主部反映 $f(z)$ 在奇点 z_0 处的特性，十分重要.

z_0 是函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R$ 内的洛朗级数的负幂项的奇点，但 z_0 不一定是 $f(z)$ 的奇点. 如对于函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$，$z = 1,2$ 是 $f(z)$ 的奇点，但在圆环域 $1 < |z| < 2$ 和 $2 < |z| < +\infty$ 内，$z = 0$ 是各负幂项的奇点，而不是 $f(z)$ 的奇点. 对于 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$，$z_0 = 0$ 是函数奇点，在圆环域 $0 < |z| <$

$+\infty$ 内的洛朗级数的负幂项的奇点也是圆环域中心.

4. 函数 $\tan(1/z)$ 能否在圆环域 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数?

答　不能. $z=0$ 是 $\tan(1/z)$ 的奇点,但

$$\tan(1/z)=\sin(1/z)/\cos(1/z)$$

的奇点有无穷多个. 除 $z=0$ 外,

$$z_k=1\Big/\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad k=0,\pm 1,\cdots$$

都是 $\tan\dfrac{1}{z}$ 的奇点. 当 $k\to\infty$ 时, $z_k\to 0$, 所以不存在一个去心邻域 $0<|z|<R$, 使 $\tan\dfrac{1}{z}$ 在圆环域内解析,从而不可能将 $\tan\dfrac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数.

5. 怎样理解 $f(z)$ 的洛朗级数"惟一性"说法?

答　函数 $f(z)$ 的洛朗级数的惟一性指的是,同一函数在同一圆环域内的洛朗展开式是惟一的. 因为函数 $f(z)$ 的奇点可能不止一个,因此使 $f(z)$ 解析的圆环域也不止一个,于是函数 $f(z)$ 在不同的圆环域内可以有不同形式的洛朗级数,这与 $f(z)$ 的洛朗级数"惟一性"说法是不矛盾的.

例如,函数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ 有两个奇点 $z_1=1$ 与 $z_2=-2$,有三个以 $z=0$ 为中心的圆环域,其洛朗级数分别为:

在 $|z|<1$ 内, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n$;

在 $1<|z|<2$ 内, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum\limits_{n=-1}^{\infty}z^n$;

在 $2<|z|<+\infty$ 内, $f(z)=\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right]z^n$.

可见在不同圆环域内,有不同的洛朗级数;但在一个圆环域内只有

惟一的洛朗级数.

方法、技巧与典型例题分析

如同函数 $f(z)$ 展为幂级数有直接展开法和间接展开法一样，函数展开为洛朗级数也有直接展开法和间接展开法. 一般都采用间接展开法，因此比较简捷. 但是，在未指定圆环域的情形，首要的是先确定 $f(z)$ 的所有奇点以及所有圆环域，再确认在圆环域内是否可展开为洛朗级数(如疑难解析 4)，最后才进行洛朗展开.

一、直接展开法的运用

直接展开法的关键是计算 $c_n=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，因此，积分的技巧是更好地计算 c_n，读者要利用第三章中复变函数积分的技巧做好 c_n 的计算.

例 1 将 $f(z)=\mathrm{e}^{a(z-1/z)/2}$ 展开为洛朗级数.

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的惟一奇点，所以 $f(z)$ 在 $0<|z|<\infty$ 解析，可以展开为洛朗级数.

不妨取 C 为 $|z|=1$，则在 C 上，$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，于是

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})/2}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(a\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令 $t=2\pi-\theta$，则 $\theta=2\pi-t$，$\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta&=\int_{2\pi}^{0}\sin[a\sin(2\pi-t)-n(2\pi-t)](-\mathrm{d}t)\\&=-\int_0^{2\pi}\sin[a\sin t-nt]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即
$$\int_0^{2\pi}\sin(a\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

从而
$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(a\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta,\quad n=0,\pm1,\cdots.$$

得
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$
$$c_n = c_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$$
被称为第一类贝塞尔(Bessel) 函数.

例 2 求函数 $f(z) = \sin\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 的洛朗展开式.

解 $f(z)$ 只有惟一奇点 $z = 0$,所以在 $0 < |z| < \infty$ 内解析,可以展开为洛朗级数.

取 C 为 $|z| = 1$,则 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$
而
$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\theta \sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta \xlongequal{\text{奇}} 0,$$
故
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta, \quad n = 0, \pm 1, \cdots.$$
得
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

例 3 在 $0 < |z| < +\infty$ 内,将 $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2}$ 展开为洛朗级数.

解 $f(z)$ 在复平面上除 $z = 0$ 外处处解析;故可以在圆环域 $0 < |z| < \infty$ 上展开为洛朗级数.

取 C 为 $|z| = \rho\ (0 < \rho < \infty)$,则
$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta.$$
当 $n \leqslant -3$ 时,$\mathrm{e}^{\zeta}/\zeta^{n+3}$ 在 C 上解析,此时 $c_n = 0$;当 $n \geqslant -2$ 时,由高阶导数公式,有
$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}z^{n+2}}(\mathrm{e}^z)\right]_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}, \quad n = -2, -1, 0, 1, \cdots.$$

于是 $$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots.$$

例 4 若 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内解析，在 $R \leqslant R' < |z| < +\infty$ 内有界，则 $f(z)$ 的洛朗展开式如下：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \quad |z| < R.$$

证 令 $z = \frac{1}{\zeta}$，则 $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 在圆环域 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ 内解析；当 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R'}$ $(R' \geqslant R)$ 时，$|g(\zeta)| = \left|f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| \leqslant M$. 于是，在 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R'}$ 内，有

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{\rho^n}, \ 0 < \rho \leqslant \frac{1}{R'}.$$

于是 $n < 0$ 时，$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \to 0 \ (\rho \to 0)$，所以 $c_n = 0 \ (n < 0)$.

令 $g(0) = c_0$，则

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \quad |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

代回，即得

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \quad |z| > R.$$

二、间接展开法的运用

函数 $f(z)$ 展开为洛朗级数的间接展开法也有很多种方法，例如代换法、部分分式法、公式 $\frac{1}{1-z}$ 法、逐项求导法和逐项积分法等. 在这里，我们不再详细分类，因为一个函数在不同圆环域中展开时可能不用同一种展开法，有时在一个圆环域内展开为洛朗级数还要用几种方法. 读者应注意例题中使用的方法以及方法之间的衔接，这将是有益的.

1. 代换法

例 5 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$ 展开为洛朗级数. 圆环域为:

(1) $0<|z-\mathrm{i}|<1$; (2) $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}=\left(\dfrac{1}{z}\right)'\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}$.

而 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{1}{1+(z-\mathrm{i})/\mathrm{i}}$ (利用 $\dfrac{1}{1-w}$ 展式)

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n,0<|z-\mathrm{i}|<1.$$

又
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+\mathrm{i}-\mathrm{i}}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{1+\mathrm{i}/(z-\mathrm{i})}$$
$$=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{3n}(z-\mathrm{i})^{-n-1},$$
$$1<|z-\mathrm{i}|<+\infty.$$

(1) 在 $0<|z-\mathrm{i}|<1$,有

$$\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}\right)'=\frac{-1}{\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^{n-1},$$

$$f(z)=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{i}^{n+1}(z-\mathrm{i})^{n-2}$$
$$=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)\mathrm{i}^{n+2}(z-\mathrm{i})^n,\ 0<|z-\mathrm{i}|<1.$$

(2) 在 $1<|z-\mathrm{i}|<\infty$,有

$$\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{i}^{2n}(z-\mathrm{i})^{-n-2},$$

$$f(z)=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{i}^{2n}(z-\mathrm{i})^{-n-3}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{-3}(-n-2)\mathrm{i}^{-2(n+3)}(z-\mathrm{i})^n,\quad 1<|z-\mathrm{i}|<\infty.$$

本例在使用公式 $\dfrac{1}{1-w}$ 的同时,还使用了逐项求导法.

例 6 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-5}$ 展开为洛朗级数. 圆环域为:

(1) $0<|z-3|<2$; (2) $2<|z-3|<+\infty$;

(3) $0 < |z-1| < 4$;　　　(4) $4 < |z-1| < +\infty$.

解　要利用$\dfrac{1}{1-w}$的展开式，首先要将 $f(z)$ 在给定圆环域内变形，使含有$(z-z_0)$，且 $|w|<1$，然后依公式展开.

(1) $$f(z)=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{-2+(z-3)}$$
$$=\frac{1}{-2}\frac{1}{1-(z-3)/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n+1}},\quad 0<|z-3|<2.$$

(2) $$f(z)=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{-2+(z-3)}$$
$$=\frac{1}{z-3}\frac{1}{1-2/(z-3)}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-3}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3)^{n+1}},\quad 2<|z-3|<+\infty.$$

在题(1)分母的两个因式 2 和$(z-3)$中，2 的模大，提出 2，则 $|(z-3)/2|<1$；在题(2)分母的两个因式 2 和$(z-3)$中，$(z-3)$的模大，提出$(z-3)$，则 $|z/(z-3)|<1$. 这是今后解题中必须注意的.

(3) $$f(z)=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-1-4}$$
$$=\frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{1-(z-1)4}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}},\quad 0<|z-1|<4.$$

(4) $$f(z)=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-1-4}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-4/(z-1)}$$
$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z-1)^{n+1}},$$
$$1<|z-1|<+\infty.$$

2. 部分分式法

当 $f(z)$ 为有理分式函数时，可先分解 $f(z)$ 为部分分式，然后再用公式法或其它方法展开为洛朗级数.

例 7 在 $1<|z|<3$ 内，将 $f(z)=\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ 展开为洛朗级数.

解 分解 $f(z)$ 为部分分式，再逐项展开.

$$f(z)=-\frac{1}{242}\left(\frac{z^4+3z^3+9z^2+27z+81}{z^5-1}-\frac{1}{z-3}\right)$$

$$=-\frac{1}{242}\left[\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}+\frac{81}{z^5}\right)\frac{1}{1-1/z^5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z/3}\right]$$

$$=-\frac{1}{242}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{5n+1}}+\frac{3}{z^{5n+2}}+\frac{9}{z^{5n+3}}+\frac{27}{z^{5n+4}}+\frac{81}{z^{5z+5}}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{-1}{242}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{5n+1}}+\frac{3}{z^{5n+2}}+\frac{9}{z^{5n+3}}+\frac{27}{z^{5n+4}}+\frac{81}{z^{5n+5}}+\frac{z^4}{3^{n+1}}\right).$$

例 8 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 及 $|z|>2$ 展开为洛朗级数.

解

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$$

$$=\frac{-1-2i}{z+i}\cdot\frac{1}{10}+\frac{-1+2i}{z-i}\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}.$$

(1) 在 $1<|z|<2$ 内，洛朗级数为

$$f(z)=\frac{-1-2i}{10}\cdot\frac{1}{z(1+i/z)}$$

$$+\frac{-1+2i}{10}\cdot\frac{1}{z(1-i/z)}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(1-z/2)}$$

$$=\frac{-1-2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot i^n}{z^{n+1}}$$

$$+\frac{-1+2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{2n}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}.$$

(2) 在 $|z| > 2$ 内，洛朗级数为

$$f(z) = \frac{-1-2\mathrm{i}}{10}\cdot\frac{1}{z(1+\mathrm{i}/z)} + \frac{-1+2\mathrm{i}}{10}\frac{1}{z(1-\mathrm{i}/z)} + \frac{1}{5z}\frac{1}{(1-2/z)}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{2n}} + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}}.$$

例 9　将 $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 展开为洛朗级数，其中 $|a| < |b|$，a,b 都是复数. 圆环域为：

(1) $0 < |a| < |z| < |b|$；　　　(2) $|z| > |b|$.

解　(1) 在 $0 < |a| < |z| < |b|$ 内，有

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{(1-a/z)z} + \frac{1}{(1-z/b)b}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{b^{n+1}}\right].$$

(2) 在 $|z| > |b|$ 内，有

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z(1-a/z)} + \frac{1}{z(1-b/z)}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}-b^{n}}{z^{n+1}}.$$

例 10　将 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^{2}}$ 展开为洛朗级数，圆环域为：

(1) $0 < |z-\mathrm{i}| < 2$；　　　(2) $2 < |z-\mathrm{i}| < +\infty$；

(3) $1 < |z| < +\infty$.

解　$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{i}}.$$

(1) 在 $0<|z-\mathrm{i}|<2$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1+(z-\mathrm{i})/(2\mathrm{i})}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^{n-1}}{(2\mathrm{i})^n}.$$

(2) 在 $2<|z-\mathrm{i}|<+\infty$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{1+2\mathrm{i}/(z-\mathrm{i})}$$

$$=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\mathrm{i})^n}{(z-\mathrm{i})^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\mathrm{i})^n}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}.$$

(3) 在 $1<|z|<\infty$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+1/z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}.$$

例 11 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 和 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$，所以

① 在 $1<|z|<2$ 内，有

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+1/z^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

② 在 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\mathrm{i}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}-\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)$$

$$= \frac{1}{z-2} + \mathrm{i}\left[\frac{1}{2-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/(2-\mathrm{i})} - \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+(z+2)/(2+\mathrm{i})}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2-\mathrm{i})^{n+1}} - \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2+\mathrm{i})^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z-2} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2+\mathrm{i})^{n+1}-(2-\mathrm{i})^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n.$$

3. 代换法

例 12 求函数 $f(z)=\mathrm{e}^{z/(z+2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式.

解 令 $z=\frac{1}{t}$，则 $f(z)=\mathrm{e}^{1/(1+2t)}=\varphi(t)$. $t=0$ 为解析点，$\varphi(t)$ 在 $|t|<\frac{1}{2}$ 内解析.

$\varphi(t)=\mathrm{e}^{1/(1+2t)}$, $\qquad \varphi(0)=\mathrm{e}$,

$\varphi'(t)=\frac{-2}{(1+2t)^2}\varphi(t)$, $\qquad \varphi'(0)=-2\mathrm{e}$,

$\varphi''(t)=\left[\frac{8}{(1+2t)^2}+\frac{4}{(1+2t)^4}\right]\varphi(t)$, $\qquad \varphi''(0)=12\mathrm{e}$,

…… $\qquad$ ……

所以 $\qquad \varphi(t)=\mathrm{e}[1-2t+6t^2-\cdots]$, $\quad |t|<\frac{1}{2}$,

即 $\qquad f(z)=\mathrm{e}\left[1-\frac{2}{z}+\frac{6}{z^2}-\cdots\right]$, $\quad 2<|z|<+\infty$.

例 13 将 $f(z)=\mathrm{e}^{1/(1-z)}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内展开为洛朗级数.

解 令 $t=\frac{1}{1-z}$，则

$$f(z)=\mathrm{e}^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots.$$

而 $t=\frac{1}{1-z}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内的展开式为

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right).$$

所以,代入可得

$$\begin{aligned}f(z)&=1-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\\&\quad+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)^2+\cdots\\&=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\frac{19}{120z^5}+\cdots.\end{aligned}$$

4. 利用幂级数展开式法

例 14 求函数 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内的洛朗级数.

解 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内,有

$$\begin{aligned}f(z)&=\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\\&=\sin1\cos\frac{1}{z-1}+\cos1\sin\frac{1}{z-1}\text{(利用 }\sin z,\cos z\text{ 的幂级数)}\\&=\sin1\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots\right]\\&\quad+\cos1\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}+\cdots\right]\\&=\sin1+\frac{\cos1}{z-1}-\frac{\sin1}{2!(z-1)^2}+\frac{\cos1}{3!(z-1)^3}+\cdots\\&\quad+(-1)^n\frac{\sin1}{(2n)!(z-1)^{2n}}\\&\quad+(-1)^n\frac{\cos1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots.\end{aligned}$$

5. 其它展开方法

例 15 将 $f(z)=\frac{\ln(2-z)}{z^2(z-1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开为洛朗级数.

解 因为 $f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-1}\ln(2-z)$,所以由

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,$$

$$\frac{1}{z^2}=\left(\frac{-1}{z}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n,$$

$$\ln(2-z)=\ln[1-(z-1)]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},\quad |z-1|<1,$$

得 $$f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}(z-1)^{n+1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\frac{1}{n-k+1}\right](z-1)^n,$$

$$0<|z-1|<1.$$

其中用了幂级数的乘法公式.

例 16 求 $\cot z$ 在 $0<|z|<\pi$ 的洛朗展开式.

解 因为 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ 是奇函数,所以 $\cot z$ 的洛朗级数只含奇次项.于是,用待定系数法,有

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-z^2/2!+z^4/4!-\cdots}{z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots}$$

$$=b_{-1}z^{-1}+b_1z+b_3z^3+b_5z^5+\cdots,$$

即 $$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

$$=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(\frac{b_{-1}}{z}+b_1z+b_3z^3+\cdots\right).$$

比较等式两边同次幂系数,得

$$b_{-1} = 1,$$

$$b_1 - \frac{b_{-1}}{3!} = -\frac{1}{2!},$$

$$b_3 - \frac{b_1}{3!} + \frac{b_{-1}}{5!} = \frac{1}{4!},$$

$$b_5 - \frac{b_3}{3!} + \frac{b_1}{5!} - \frac{b_{-1}}{7!} = -\frac{1}{6!},$$

……

解得　$b_{-1} = 1$, $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = -\frac{1}{45}$, $b_5 = -\frac{2}{945}$, …,

于是,在 $0 < |z| < \pi$ 内,有

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots.$$

例 17　将 $f(z) = \dfrac{e^z}{e^z - 1}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开为洛朗级数.

解　用幂级数除法(长除法,除式略),有

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{e^z - 1} &= 1 + \frac{1}{e^z - 1} = 1 + \frac{1}{z + z^2/2! + z^3/3!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + z/2 + z^2/6 + z^3/24 + z^4/120 + \cdots} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + 12z - \frac{z^3}{720} + \cdots, \quad 0 < |z| < +\infty. \end{aligned}$$

本例亦可用例 16 的方法展开.

例 18　设 C 为正向圆周 $|z| = 3$,求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值,设 $f(z)$ 为:

(1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$;　　(2) $\dfrac{z+2}{z(z+1)}$;

(3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$;　　(4) $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$.

解　先将 $f(z)$ 展开为洛朗级数,再利用积分

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

(1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$ 在 $|z|>2$ 内处处解析,洛朗展开式为

$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+2/z)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^2}-\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^4}+\cdots\right),\quad 2<|z|<+\infty.$$

而 $|z|=3$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内,$c_{-1}=0$,故

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=0.$$

(2) $\dfrac{z+2}{z(z+1)}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内处处解析,洛朗展开式为

$$\frac{z+2}{z(z+1)}=\frac{1}{z+1}\left(1+\frac{2}{z}\right)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+1/z}\left(1+\frac{2}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}-\cdots,\quad 1<|z|<+\infty.$$

而 $|z|=3$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内,$c_{-1}=1$,故

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}.$$

(3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内处处解析,洛朗展开式为

$$\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{1+z}\right]'=\frac{-1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$=\frac{-1}{z}\left[\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)\right]'$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\frac{3}{z^5}+\cdots.$$

而 $|z|=3$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内,$c_{-1}=0$,故

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot c_{-1}=0.$$

(4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内处处解析,洛朗展开式为

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\right]=\frac{1}{1+1/z}-\frac{1}{1+2/z}$$
$$=\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{7}{z^3}-\cdots,\quad 2<|z|<+\infty.$$
而 $|z|=3$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内，$c_{-1}=1$，故
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot c_{-1}=2\pi\mathrm{i}.$$

例 19 计算积分 $\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$. 其中 C 为 $|z|=1$ 内任何一条不经过原点的简单闭曲线.

解 $\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，由上例所举积分知，对 $\sum_{n=-2}^{\infty}z^n$ 进行逐项积分，得
$$\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=0+2\pi\mathrm{i}+0=2\pi\mathrm{i}.$$

三、关于洛朗级数的证明题

利用函数的洛朗展开式来证明问题，首先要考察在所给条件下，函数是否可以展开为洛朗展开式；然后将函数展开，用展开式来证明问题.

例 20 证明：$f(z)=\ln\frac{1}{z-1}$ 不能在 $z=\infty$ 的邻域内展为洛朗级数.

证 作代换 $z=\frac{1}{\zeta}$，则有
$$f(z)=\ln\frac{1}{z-1}=\ln\frac{\zeta}{1-\zeta}=\ln\left|\frac{\zeta}{1-\zeta}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\zeta}{1-\zeta}$$
$$=\ln|\zeta|-\ln|1-\zeta|+\mathrm{i}[\arg\zeta-\arg(1-\zeta)].$$
因为 $\zeta=0$ 是奇点，$\arg z$ 在负实轴上间断，$\arg(1-\zeta)$ 在负实轴上连续，所以 $\arg\zeta-\arg(1-\zeta)$ 在负实轴上间断，而在 $\zeta=0$ 的任意小邻域内都有负实轴上的点. 于是 $\zeta=0$ 不是孤立奇点，因而在 $z=\infty$ 的邻域内不能展开为洛朗级数.

例 21　如果 k 为满足关系 $k^2 < 1$ 的实数,证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta - k}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

证　当 $|z| > k$,且 $k^2 < 1$ 时,有

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-k/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{k}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}.$$

令 $z = e^{i\theta}$,则 $z^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$,于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} k^n[\cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta].$$

又
$$\frac{1}{z-k} = (e^{i\theta}-k)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta - k}$$

$$= \frac{(\cos\theta - k) - i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

比较两式的实部与虚部,即得所证等式.

例 22　证明:在 $0 < |z| < +\infty$ 时,有

$$\operatorname{ch}\left(z+\frac{1}{z}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

其中
$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta \operatorname{ch}(2\cos\theta)d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \cdots.$$

证　因为 $z = 0$ 和 ∞ 是 $\operatorname{ch}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 的奇点,所以在 $0 < |z| < \infty$ 内,$\operatorname{ch}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 可展开为洛朗级数.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{ch}(z+1/z)}{z^{n+1}}dz \quad (z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{ch}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{in\theta}}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(2\cos\theta)(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta.$$

但 $$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}(2\cos\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta \xlongequal{\text{奇}} 0,$$

所以 $$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\theta \mathrm{ch}(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

例 23 若 $f(z)$ 在任何一个包含单位圆周 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 的圆环域上解析，将 $f(z) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 视为 θ 的函数时，证明：$f(z)$ 的洛朗级数是 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 作为 θ 的函数的傅里叶(Fourier) 级数.

证 因为在 $|z| = 1$ 上，$f(z)$ 的洛朗级数为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$.

$$f(z) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n + c_{-n})\cos n\theta + \mathrm{i}(c_n - c_{-n})\sin n\theta],$$

其中 $$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta.$$

若记 $$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

$$a = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos n\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin n\theta \mathrm{d}\theta,$$

于是，$f(z) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 为关于 θ 的傅里叶级数，即

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

第五章　留　数

本章在讨论解析函数的孤立奇点的基础上，重点讨论留数定理及其应用，并对对数留数、辐角原理作了介绍.

第一节　孤立奇点

主要内容

1. 孤立奇点

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但在 z_0 的某一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内处处解析，那么 z_0 称为 $f(z)$ 的孤立奇点.

如果在 z_0 的任意小邻域内总有 $f(z)$ 的其它奇点存在，则 z_0 不是 $f(z)$ 的孤立奇点，而是 $f(z)$ 的奇点的极限点.

孤立奇点分为可去奇点、极点和本性奇点.

2. 可去奇点

如果 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 的洛朗级数中不含 $z - z_0$ 的负幂项，则称孤立奇点 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

如 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ 以 $z = 0$ 为孤立奇点，其洛朗展开式为

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots.$$

式中不含 z 的负幂项，是可去奇点，且 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$. 若 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z = 0$ 点无定义或不等于 1，则只要重新定义 $z = 0$ 处函数的值，使其等

于 1，奇点就可去，$f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 就在 $z=0$ 解析了.

以下三个条件是等价的：

(1) $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数不含 $z-z_0$ 的负幂项；

(2) $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在；

(3) $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域内有界.

3. 极点

如果 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数中只有 $(z-z_0)$ 的有限个负幂项，则孤立奇点 z_0 称为极点. 若负幂的最高项为 $(z-z_0)^{-m}$，则 z_0 称为 m 级极点.

与之等价的条件是：z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

4. 本性奇点

如果 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数中含有 $(z-z_0)$ 的无穷多个负幂项，则孤立奇点 z_0 称为本性奇点.

与之等价的条件是：z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不等于 ∞.

在本性奇点的邻域内，$f(z)$ 具有以下性质：

(1) 维尔斯特拉斯定理　若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则对于任一复数 w_0 及任给的 $\varepsilon>0$、任意的 $r>0$，在区域 $0<|z-z_0|<r$ 中必存在一点 z'，使得 $|f(z')-w_0|<\varepsilon$.

推论　在任意一个圆环域 $0<|z-z_0|<r$ 中，必存在序列 $\{z_n\}$，使 $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z)=w_0$.

(2) 毕卡(Picard)定理　解析函数 $f(z)$ 在本性奇点 $z=z_0$ 的任何邻域内，能够取任意一个有限值(复数)无穷次，至多有一个值例外.

5. 函数的零点与极点的关系

不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 若能表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，m 为一正整数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点.

(1) 若 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0,\quad n=0,1,2,\cdots,m-1;$$

$$f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

(2) 一个不恒为零的解析函数的零点是孤立的.

(3) 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反之也成立.

6. 函数在无穷远点的性态

如果 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称点 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

作变换 $t=\dfrac{1}{z}$(规定把扩充 z 平面上的无穷远点 $z=\infty$ 映射为扩充 t 平面上的点 $t=0$)，把扩充 z 平面上的邻域 $R<|z-z_0|<+\infty$ 映射成扩充 t 平面的去心邻域 $0<|t|<\dfrac{1}{R}$，且有 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\varphi(t)$. 于是，可以把在 $R<|z|<+\infty$ 上对 $f(z)$ 的研究化为在 $0<|t|<\dfrac{1}{R}$ 内对 $\varphi(t)$ 的研究.

(1) 如果 $t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、m 级极点或本性奇点，则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m 级极点或本性奇点.

(2) 若 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内可以展开为洛朗级数，那么有：如果在洛朗级数中，

不含正幂项，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 可去奇点；

含有限个正幂项，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的极点；

含无穷多正幂项，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 本性奇点.

疑难解析

1. 函数的奇点是怎样分类的?

答 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的奇点. 奇点分为孤立奇点与非孤立奇点两类.

非孤立奇点包括奇点的极限点(聚点)和多值函数的枝点. 如 $f(z) = 1/\cos\frac{1}{z}$, $z = 0$ 是 $f(z)$ 的奇点，但不是孤立奇点. 因为 $z_k = 2/(2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \cdots$，当 $k \to \infty$ 时，$z_k \to 0$，即在 $z = 0$ 的不论多么小的邻域内，总有除 $z = 0$ 以外的其它奇点，所以 $z = 0$ 不是孤立奇点，而是奇点列 $\{z_k\}$ 的极限点. 对于多值函数(如 $w = \sqrt[n]{z}$) 而言，在其分枝点处，函数 $f(z)$ 因在其邻域内缺乏单值性而不再解析，因而也是函数的奇点.

孤立奇点因 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 的不同而分为可去奇点、极点和本性奇点.

2. 比较可去奇点与实函数可去间断点概念的相同点.

答 对实一元函数 $y = f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在，但 $f(x_0) \neq A$ 或 $f(x)$ 在 x_0 无定义，则可重新定义或补充定义 $f(x)$ 在 x_0 的值，使 $f(x_0) = A$，于是 $f(x)$ 在 x_0 就连续，即间断点 $x = x_0$ 可去.

对复变函数 $f(z)$，如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但其洛朗级数不含负幂项，则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点. 其可去的意义与实函数的可去间断点意义十分接近. 例如，$f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ 的洛朗展开式

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z + 1 = 2 + (z-1),\ 0 < |z-1| < \infty$$

不含负幂项，所以 $z = 1$ 是 $f(z)$ 的可去奇点. 显然 $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ 在 $z = 1$ 无定义，但 $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{z-1} = 2$，因此只要补充定义 $f(1) = 2$，

就有

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z-1}, & z\neq 1,\\ 2, & z=1\end{cases}$$

在 $z=1$ 解析，于是 $f(z)$ 的奇点 $z=1$ 可去.

3. 举例说明解析函数在本性奇点邻域内的特殊性质.

答　维尔斯特拉斯定理及其推论指出：若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的一个本性奇点，则对于任意一个复常数 A，总有一个趋向于 z_0 的序列 $\{z_n\}$ 存在，使得 z 沿这个数列趋向于 z_0 时，有 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$. 即函数 $f(z)$ 在本性奇点邻域内所取的值可以任意一个预先取定的复数. 这个性质是很特殊的.

例如

$$f(z)=\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}+\cdots$$

有一个孤立奇点 $z=1$，对任何复数 $A\neq\infty$，取

$$z_n=\frac{1}{\ln(\mathrm{i}A+\sqrt{1-A^2})+2\pi n\mathrm{i}}+1,$$

就有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{z-1}\right)=A$.

同时，由毕卡定理，解析函数 $f(z)$ 在本性奇点 $z=z_0$ 的任何邻域内，能够取任意一个有限值无穷次，至多有一个值例外. 例如有

$$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots,$$

$z=0$ 是本性奇点. 若取 $A=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, A\neq 0$，则方程 $\mathrm{e}^{1/z}-A=0$ 在以任何正数 δ 为半径的圆 $|z|<\delta$ 内有无穷个根. 因为，由 $\mathrm{e}^{1/z}=A$，有

$$\frac{1}{z}=\ln\rho+\mathrm{i}(\theta+2k\pi),\ k=0,1,2,\cdots.$$

当$(\ln\rho)^2+(\theta+2k\pi)^2\geqslant\frac{1}{\delta^2}$时，$|z|<\delta$. 而满足此条件的 k 有无穷多个.

4. 若解析函数的零点不是孤立的，那么它是否一定是常数？

答 解析函数的零点一般是孤立的，这由零点的孤立性定理可知. 除此之外，只有常数零可以作为零点.

方法、技巧与典型例题分析

本节的主要问题是确定奇点的类型. 确定奇点首先要分清是孤立奇点还是非孤立奇点，由考察 z_0 的任意小邻域内是否还有其它奇点来区分. 如果是孤立奇点，还要看 z_0 是有限的还是无限的. 若 z_0 是有限的，则可由 $f(z)$ 在 z_0 邻域的洛朗展开式中所含负幂项的多少和 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 的不同结果来区分是可去奇点、极点或本性奇点. 如奇点是无限的，则可用代换 $\zeta=\frac{1}{z}$ 化 $f(z)$ 为 $\varphi(\zeta)$，也可直接在 $R<|z|<+\infty$ 内展开 $f(z)$ 为洛朗级数来讨论. 对于极点，则要讨论极点的级.

因此，对本节的概念必须十分熟悉. 在讨论奇点的运算时要掌握展开洛朗级数与计算函数极限的技巧.

例 1 设函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 都以 $z=z_0$ 为孤立奇点，问：函数 $f_1(z)+f_2(z)$ 在 $z=z_0$ 处的孤立奇点是什么类型？

解 需要区别不同情形加以详细讨论.

(1) z_0 是 $f_1(z)$ 的可去奇点的情形

1) 若 z_0 是 $f_2(z)$ 的可去奇点，由于 $\lim\limits_{z\to z_0}f_1(z)+f_2(z)$ 存在，z_0 仍然是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的可去奇点.

2) 若 z_0 是 $f_2(z)$ 的极点，由于 $\lim\limits_{z\to z_0}f_1(z)+f_2(z)=A+\infty=\infty$，此时 z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的极点.

3）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的本性奇点，由于 $\lim\limits_{z\to z_0}[f_1(z)+f_2(z)]=\lim\limits_{z\to z_0}f_1(z)$ 不存在，且不等于 ∞，此时 z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 本性奇点.

(2) z_0 是 $f_1(z)$ 的极点的情形

1）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的可去奇点，如以上第(1)条中的第2)点，则 z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的极点.

2）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的极点，则当 $f_2(z)=-f_1(z)$ 时，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的可去奇点；当 $f_1(z)=f_2(z)$ 时，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的极点.

3）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的本性奇点，由于 $\lim\limits_{z\to z_0}[f_1(z)+f_2(z)]$ 不存在，且不等于 ∞，此时 z_0 仍是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的本性奇点.

(3) z_0 是 $f_1(z)$ 的本性奇点的情形

1）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的可去奇点或极点，如以上第(1)条中的第3)点和第(2)条中的第3)点，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的本性奇点.

2）若 z_0 是 $f_2(z)$ 的本性奇点，则当 $f_2(z)=-f_1(z)$ 时，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的可去奇点；当 $f_2(z)=f_1(z)$ 时，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的本性奇点；当 $f_2(z)=-f_1(z)+\dfrac{1}{(z-z_0)^m}$ 时，z_0 是 $f_1(z)+f_2(z)$ 的 m 级极点.

例 2 设函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别以 $z=0$ 为 n 级极点及 m 级极点，则 $z=0$ 是下列函数的什么奇点？

(1) $f_1(z)+f_2(z)$；　(2) $f_1(z)\cdot f_2(z)$；　(3) $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

解 (1) 当 $n\neq m$ 时，$f_1(z)+f_2(z)$ 的洛朗展开式的最高负幂次为 $\max\{n,m\}$，所以 $z=0$ 为 $\max\{n,m\}$ 级极点；当 $n=m$ 时，若 $f_2(z)=-f_1(z)$，则 $z=0$ 为可去奇点；一般地，$z=0$ 可以是 k 级极点，$0\leqslant k\leqslant n$，有很多种情形.

(2) 是 $n+m$ 级极点. 因为

若 $f_1(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{z^n}$，$\varphi_1(0)\neq 0$，则 $\varphi_1(z)$ 在 $z=0$ 解析.

若 $f_2(z)=\dfrac{\varphi_2(z)}{z^m}$，$\varphi_2(0)\neq 0$，则 $\varphi_2(z)$ 在 $z=0$ 解析. 于是

$f_1(z)f_2(z)=\dfrac{\varphi_1(z)\varphi_2(z)}{z^{m+n}}$，$\varphi_1(0)\varphi_2(0)\neq 0$，且 $\varphi_1(z)\varphi_2(z)$ 在 $z=0$ 解析. 所以 $z=0$ 是 $n+m$ 级极点.

(3) 因为$\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}=z^{m-n}\dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$，而$\dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$在 $z=0$ 解析，且$\dfrac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)}$ $\neq 0$，所以，当 $m\geqslant n$ 时，是 $m-n$ 级零点；当 $m<n$ 时，是 $n-m$ 级极点.

例 3 证明复变函数的洛必达法则：

若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两边均为 }\infty).$$

证 设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$，$\varphi(z)$、$\psi(z)$ 均在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，$\psi(z_0)\neq 0$，则左边

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$=\begin{cases}0, & m>n,\\ \varphi(z_0)/\psi(z_0), & m=0,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

由于 $$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z),$$

$$g'(z)=n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z),$$

右边

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)}{n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z)}$$

$$=\begin{cases}0, & m>n,\\ \varphi(z_0)/\psi(z_0), & m=0,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

所以左边等于右边，命题成立.

例 4 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级.

(1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$;　　(2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$;

(3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$;　　(4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$;

(5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$;　　(6) $e^{\frac{1}{z-1}}$;

(7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$;　　(8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$　(n 为正整数).

解　由函数是否在 z_0 解析，确定 z_0 是否为 $f(z)$ 的奇点. 由奇点是分母的零点的级，确定极点的级.

(1) $z=0$，$\pm i$ 为奇点. 0 是一级极点，$\pm i$ 都是二级极点.

(2) $z=0$ 是奇点，是二级极点(分母三级零点，分子一级零点).

(3) 分母可表示成 $(z-1)^2(z+1)$，$z=1$，-1 是奇点，1 是二级极点，-1 是一级极点.

(4) $z=0$ 是奇点，是可去奇点 $\left(\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=1\right)$.

(5) $z=\pm i$，$(2k+1)i$ ($k=1$，± 2，± 3，$\cdots$) 是奇点. $\pm i$ 是二级极点，$(2k+1)i$ 是一级极点.

(6) $z=1$ 是奇点，是本性奇点. 因为

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)}+\cdots.$$

(7) $z=2k\pi i$ ($k=0$，± 1，$\cdots$)，$z=0$ 是奇点，$2k\pi i$ 是一级极点，0 是二级零点.

(8) $z=e^{(2k+1)\pi i/n}$ ($k=0,1,\cdots$) 是奇点，都是一级极点.

例 5　指出下列函数全部奇点的类型，若是极点，指出是几级极点.

(1) $\dfrac{\tan(z-1)}{(z-1)}$;　　(2) $\dfrac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})\sin(\pi/z)}$;

(3) $\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$;　　(4) $\sin\dfrac{1}{z-1}$;

(5) $\sec\dfrac{1}{z-1}$;　　(6) $\cot z-\dfrac{1}{z}$.

解　(1) $f(z)=\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\dfrac{1}{\cos(z-1)}$.

$z=1$ 和 $z=1+\dfrac{2k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的奇点.

$z=1$ 是可去奇点,因为 $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}=1$.

$z=1+\dfrac{2k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots)$ 是一级极点.

(2) $z=\pm\mathrm{i}$, $z=(2k+1)\mathrm{i}\ (k=0,\pm 1,\cdots)$, $z=\dfrac{1}{k}$ 及 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点.

$z=\pm\mathrm{i}$ 是二级极点(包括 $k=0$ 和 -1 时 $(2k+1)\mathrm{i}$).

$z_k=(2k+1)\mathrm{i}\ (k=1,\pm 2,\cdots)$ 是一级极点.

$z_k=\dfrac{1}{k}\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是一级极点.

$z=0$ 是 $z_k=\dfrac{1}{k}$ 的极限点,不是孤立奇点.

(3) $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点. 因为

$$z^3(\mathrm{e}^{z^3}-1)=z^6+\frac{1}{2!}z^9+\frac{1}{3!}z^{12}+\cdots,$$

所以,$z=0$ 是 $f(z)$ 的六级极点.

(4) $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点,在 $0<|z|<+\infty$ 内,有

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots,$$

故 $z=1$ 是 $f(z)$ 是本性奇点.

(5) 因为 $\sec\dfrac{1}{z-1}=1\Big/\cos\dfrac{1}{z-1}$,所以

$$z_k=1+\frac{1}{k\pi+\pi/2},\quad k=0,\pm 1,\cdots$$

是 $f(z)$ 的奇点,但 $z=1$ 是 z_k 当 $k\to\infty$ 时的极限点,不是孤立奇点. z_k 是 $f(z)$ 的一级极点.

(6) $z_k=k\pi$ 和 $z=0$ 是奇点. 因为 $\lim\limits_{z\to 0}\left[(\cot z)-\dfrac{1}{z}\right]=0$,所以

$z=0$ 是可去奇点，$z_k=k\pi$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 是 $f(z)$ 一级极点.

例 6 $z=0$ 是 $(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^{-2}$ 的几级极点？

解 先判断 $f(z)=(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)$ 零点的阶数，再确定极点的级.

$$f(z)=\sin z+\operatorname{sh}z-2z, \qquad f(0)=0,$$
$$f'(z)=\cos z+\operatorname{ch}z-2, \qquad f'(0)=0,$$
$$f''(z)=-\sin z+\operatorname{sh}z, \qquad f''(0)=0,$$
$$f'''(z)=-\cos z+\operatorname{ch}z, \qquad f'''(0)=0,$$
$$f^{(4)}(z)=\sin z+\operatorname{sh}z, \qquad f^{(4)}(0)=0,$$
$$f^{(5)}(z)=\cos z+\operatorname{ch}z, \qquad f^{(5)}(0)=2\neq0.$$

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 五级零点. 于是 $z=0$ 是 $(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^{-2}$ 的十级极点.

例 7 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点；这个函数又有以下洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3}, \quad |z-1|>1.$$

所以"$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点"；又其中不含 $(z-1)$ 的负幂，因此 $\operatorname{Res}[f(z),1]=0$. 这些说法对吗？

解 不对. $z=1$ 是 $f(z)$ 二级极点，不是本性奇点. 所给洛朗展开式不是在 $0<|z-1|<1$ 内得到的，在 $0<|z-1|<1$ 内的洛朗展开式为

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots.$$

又由下节知，$\operatorname{Res}[f(z),1]=c_{-1}=-1$.

例 8 考察 ∞ 点是不是下列函数的奇点：

(1) $\cot z$; (2) $\ln \dfrac{z-1}{z-2}$;

(3) $e^z \ln \dfrac{z-a}{z-b}$; (4) $\sin \dfrac{1}{\sin(1/z)}$.

解 (1) $\cot z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 是 $\cot z$ 的一级极点. 当 $k \to \infty$ 时, $z_k \to \infty$, 所以 ∞ 是 $f(z)$ 极点的极限点, 不是孤立奇点.

(2) 函数在复平面除去 $z = 1$, $z = 2$ 和连接它们的线段外单值解析. 又 $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\ln \dfrac{z-1}{z-2}\right) = 0$, 所以 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(3) $z = \infty$ 是 e^z 的本性奇点, 又是 $\ln \dfrac{z-a}{z-b}$ 的可去奇点, 所以是 $f(z)$ 的本性奇点.

(4) 因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\left[\sin\left(1\Big/\sin \dfrac{1}{z}\right)\right]$不存在, 所以 ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

例 9 若在 $0 < |z-a| < R$ 内 $f(z)$ 有界, $(z-a)^m f(z)$ 有界, 证明点 a 是 $f(z)$ 的不高于 m 级的极点.

证 令 $g(z) = (z-a)^m f(z)$, 则 $g(z)$ 在 $0 < |z-a| < R$ 内解析, 且 $|g(z)| \leqslant M$. 于是, $g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. 而

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{g(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M}{r^n}, \quad n = 0, \pm 1, \cdots,$$

其中 $r < R$. 于是, 负幂的系数

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \to 0 \ (r \to 0, n = -1, -2, \cdots),$$

即
$$c_n = 0 \quad (n = -1, -2, \cdots).$$

所以 $z = a$ 是 $g(z)$ 的可去奇点, 从而为 $f(z)$ 的不高于 m 次的极点.

例 10 若 $f(z)$ 在全平面解析, 证明:

(1) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 可去奇点 $\Longleftrightarrow f(z) \equiv$ 常数;

(2) $z = \infty$ 为 $f(z)$ m 级极点 $\Longleftrightarrow f(z)$ 为 m 次多项式;

(3) $z=\infty$ 为 $f(z)$ 本性奇点 $\Longleftrightarrow f(z)$ 在 $z=\infty$ 邻域内洛朗展开式无负幂项，有无穷多正幂项.

证 (1) **充分性** 显然，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=$ 常数.

必要性 因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$（存在），所以 $f(z)$ 在全平面有界. 由刘维尔定理，$f(z)=A$（常数）.

(2) **充分性** 显然，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

必要性 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则其洛朗展开式正幂部分为 m 次多项式 $P_m(z)$. 而 $\lim\limits_{z\to\infty}[f(z)-P_m(z)]$ 存在，从而 $f(z)-P_m(z)=$ 常数，即 $f(z)$ 为一个 m 次多项式.

(3) **充分性** 若 $z=\infty$ 不是本性奇点，则为可去奇点或极点. 于是，洛朗展开式至多有限个正幂项，推出矛盾. 故 $z=\infty$ 为本性奇点.

必要性 若只有有限个正幂项，则为可去奇点或极点，推出矛盾. 若有负幂项，则 $t=\dfrac{1}{z}$ 为本性奇点或极点. 推出矛盾，所以命题成立.

例 11（施瓦兹引理） 若函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且满足 $f(0)=0$，$|f(z)|<1$ $(|z|<1)$，证明：在 $|z|<1$ 内恒有

$$|f(z)|\leqslant|z|,\quad 且\quad |f'(0)|\leqslant 1.$$

证 由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 解析，且 $f(0)=0$，则

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots\quad(|z|<1).$$

令 $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z}$，则 $\varphi(z)$ 在 $0<|z|<1$ 解析，其洛朗级数为

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}f(z)=c_1+c_2z+\cdots+c_nz^{n-1}+\cdots,$$

故 $z=0$ 是 $\varphi(z)$ 可去奇点. 令 $\varphi(0)=c_1=f'(0)$，则 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析.

考察 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内任一点 z_0 处的值. 当 $|z_0|<r<1$ 时，由 $|f(z)|<1$ 和最大模原理（见第三章第四节例 27），有

$$|\varphi(z_0)| \leqslant \max_{|z|=r}|\varphi(z)| = \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}.$$

令 $r \to 1$，则 $|\varphi(z_0)| \leqslant 1$.

于是 $|f'(0)| = |\varphi(0)| \leqslant 1$，且当 $z_0 \neq 0$ 时，有

$$\varphi(z_0) = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqslant 1 \quad 或 \quad |f'(z_0)| \leqslant z_0.$$

由 z_0 的任意性，知命题成立.

第二节　留数定理与留数计算

主要内容

1. 定义

若 $z = z_0$ 是解析函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内解析，C 为 z_0 邻域内任一简单闭曲线，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$，即

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = c_{-1}.$$

c_{-1} 是 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域内的洛朗级数中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数.

2. 留数定理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

利用定理，可以将求沿封闭曲线 C 的积分，转化为求被积函数

在 C 中各孤立奇点处的留数.

3. 留数的计算与极点处留数的计算规则

计算留数最基本的依据是定义

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=c_{-1},$$

C 为 z_0 某去心邻域内一条简单闭曲线，c_{-1} 是以 z_0 为中心某邻域内洛朗级数 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数. 即，可通过求积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 的值或求洛朗级数 $(z-z_0)^{-1}$ 项系数来计算留数. 所以

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$.

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$.

若 z_0 为 $f(z)$ 的极点，则有以下规则.

规则 Ⅰ 若 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

规则 Ⅱ 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

规则 Ⅲ 当 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 解析，如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

实际计算时，可以用规则、也可以用定义求洛朗级数的 c_{-1}，或计算 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$.

4. 若函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，C 为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线，则称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz$ 为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数，记作

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=-c_{-1}.$$

定理　如果函数 $f(z)$ 在扩充的复平面内只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在所有各奇点（包括 ∞ 点）的留数总和必等于零.

规则 IV　$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$.

定理和规则提供了计算函数沿闭曲线积分的一种方法，方法使用恰当会使计算更加简便.

疑难解析

1. 已知有限可去奇点的留数一定为零，当 ∞ 为函数可去奇点时，留数是否一定为零？

答　不一定. 因为对于有限可去奇点 z_0，在 z_0 的某去心邻域内的洛朗级数不含负幂项，所以，$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=0$，但对于 ∞ 为函数可去奇点，情形却不是这样. 例如：

若 $f(z)=\frac{1}{z}$，有 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-1$；

若 $f(z)=\frac{1}{z^2}$，有 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$.

2. 设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 解析，$f(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 在 $z=z_0$ 是二级极点，则函数 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在 $z=z_0$ 的留数如何用 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的泰勒级数的系数表示出来？

答　因为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 解析，所以

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots,\ a_0=f(z_0)\neq 0,$$

$$g(z)=b_2(z-z_0)^2+b_3(z-z_0)^3+\cdots,\ b_2\neq 0.$$

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots}{b_2(z-z_0)^2[1+b_3(z-z_0)/b_2+b_4(z-z_0)^2/b_2+\cdots]}$$

$$=\frac{[a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots]}{b_2(z-z_0)^2}$$

$$\cdot\left\{1-\left[\frac{b_3}{b_2}(z-z_0)+\cdots\right]+\left[\frac{b_3}{b_2}(z-z_0)+\cdots\right]^2+\cdots\right\}$$

在分子中，$(z-z_0)$ 的系数为 $-\frac{a_0b_3}{b_2}+a_1$，因此，在 $z=z_0$ 处的留数为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=\left(-\frac{a_0b_3}{a_2}+a_1\right)\Big/b_2=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}.$$

3. 如何利用留数定理求某些开路的复变函数积分？

答　留数定理把沿简单闭曲线的复变函数积分与留数计算联系在一起. 但一条简单闭曲线 C 可以分解为若干条彼此衔接的光滑曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_k$，则有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{k}\int_{C_i}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}[f(z),z_j].$$

因此，我们可以把开路上的复变函数积分作为简单闭曲线 C 上的某段或某几段上的积分. 例如，要求 $\int_{\widehat{AB}}f(z)\mathrm{d}z$，可补上 $\widehat{BDA}$ 使 $\widehat{ABDA}$ 围成简单闭曲线 C. 从而

$$\int_{\widehat{ABDA}}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_j].$$

于是　$$\int_{\widehat{AB}}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{\widehat{ABDA}}f(z)\mathrm{d}z-\int_{\widehat{BDA}}f(z)\mathrm{d}z.$$

这里，选择 $\widehat{BDA}$ 是关键，$\int_{\widehat{BDA}}f(z)\mathrm{d}A$ 应简单易求，最理想的是选择使 $\int_{\widehat{BDA}}f(z)\mathrm{d}z=0$ 的光滑曲线 $\widehat{BDC}$.

方法、技巧与典型例题分析

本节习题分为两类：一是计算函数在孤立奇点的留数，二是计算复变函数积分.

一、计算函数在孤立奇点处的留数

首先，我们要利用上节的知识和技巧确定函数的孤立奇点，并确定奇点的类型. 然后根据奇点的类型选用不同的计算规则和方

法求得留数. 因此，必须熟悉求极限的技巧、求导数(包括高阶导数)的技巧和展开为洛朗级数的技巧.

例 1　求下列函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

(1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$;　(2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$;　(3) $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^2}$;

(4) $\dfrac{z}{\cos z}$;　(5) $\cos\dfrac{1}{1-z}$;　(6) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

(7) $\dfrac{1}{z\sin z}$;　(8) $\dfrac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}$.

解　(1) 因为 $z^2-2z=z(z-2)$，所以 $z=0,2$ 为 $f(z)$ 的一级极点. 故依规则 Ⅰ，有

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z+1}{z^2-2z}=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z+1}{z(z-2)}=\frac{3}{2}.$$

(2) $z=0$ 是分母四级零点，分子一级零点，因而是 $f(z)$ 的三级极点. 于是，依规则 Ⅱ，有

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}.$$

(3) 因 $(z^2+1)^3=(z+i)^3(z-i)^3$，所以 $z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的三级极点. 于是，依规则 Ⅱ，有

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-i)^3\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{8}i.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z+i)^3\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{3}{8}i.$$

(4) $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 是 $\cos z$ 一级零点，所以是 $f(z)$ 一级极点. 于是依规则 Ⅲ，有

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=z_k}=-\frac{k\pi+\pi/2}{\sin(k\pi+\pi/2)}$$

$$=(-1)^{k-1}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 因为，在 $0<|z-1|<+\infty$ 内，有

$$\cos\frac{1}{1-z}=1-\frac{1}{2!(1-z)^2}+\frac{1}{4!(1-z)^4}-\cdots,$$

故 $$\operatorname{Res}\left[\cos\frac{1}{1-z},1\right]=c_{-1}=0.$$

(6) 因为，在 $0<|z|<+\infty$ 内，有

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right),$$

故 $$\operatorname{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{6}.$$

(7) $z=0$ 是 $f(z)$ 二级极点，$z_k=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 一级极点. 依规则 Ⅰ 和规则 Ⅲ，有

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{1}{z\sin z}\right]=0,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),k\pi]=\frac{1}{(z\sin z)'}\bigg|_{z=z_k}=\frac{(-1)^k}{k\pi},\quad k=\pm1,\pm2,\cdots.$$

(8) $z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 为一级极点，依规则 Ⅲ，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=\frac{\operatorname{sh}z}{(\operatorname{ch}z)'}\bigg|_{z=z_k}=1.$$

例 2 用多种方法求 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ 的留数.

解 $z=0,z=1$ 和 ∞ 是 $f(z)$ 的一级极点.

(1) 用洛朗展开法

$$\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{5z-2}{z}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)$$
$$=-5(1+z+z^2+\cdots)$$
$$+2\left(\frac{1}{z}+1+z^2+z^2+\cdots\right),\quad 0<|z|<1.$$

$$\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{5(z-1)+3}{(z-1)}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$=\left(5+\frac{3}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=5[1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots]$$

$$+3\left[\frac{1}{z-1}+1+(z-1)-\cdots\right],\quad 1<|z|<+\infty.$$

$$\frac{z-2}{z(z-1)}=\left(\frac{5}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\frac{1}{1-1/z}=\left(\frac{5}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\frac{5}{z}+\frac{3}{z^2}+\cdots,\quad 1<|z|.$$

所以 $$\mathrm{Res}[f(z),0]=c_{-1}=2,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=c_{-1}=3,\quad \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=-5.$$

(2) 用极限法(规则 Ⅰ)

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}z\frac{5z-2}{z(z-1)}=2,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{5z-2}{z(z-1)}=3.$$

由留数和定理知

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(z),0]-\mathrm{Res}[f(z),1]=-5.$$

(3) 用柯西公式(积分)

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{5z-2}{z-1}\cdot\frac{dz}{z}=2,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{5z-2}{z}\cdot\frac{dz}{z-1}=3.$$

同极限法,有 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-5$. 注意,$C$ 内只有一个奇点.

(4) 用求导法(规则 Ⅲ)

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\left.\frac{5z-2}{[z(z-1)]'}\right|_{z=0}=2,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\left.\frac{5z-2}{[z(z-1)]'}\right|_{z=1}=3.$$

同极限法，有 $\text{Res}[f(z),\infty]=-5$.

例 3 求下列函数的留数：

(1) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$； (2) $\dfrac{2z+3}{(z^2+4)(z-1)^2}$；

(3) $\sin\dfrac{1}{z-1}$； (4) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$；

(5) $\dfrac{e^z}{z^2+1},z=i$； (6) $\dfrac{e^z}{1-\cos z},z=0$.

解 (1) $z=1,z_k=1+\dfrac{2k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的奇点.

$z=1$ 是可去奇点，故 $\text{Res}[f(z),1]=0$.

$z_k=1+\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 是一级极点，由规则 I，有

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),z_k]&=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)}\\&=\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{\cos(z-1)}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\\&\xlongequal{L'}\lim_{z\to z_k}\frac{1}{-\sin(z-1)}\lim_{z\to z_k}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\\&=-\lim_{z\to z_k}\frac{1}{z-1}\\&=-\frac{2}{(2k+1)\pi},\quad k=0,\pm1,\cdots.\end{aligned}$$

(2) $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z+2i)(z-2i)(z-1)^2}$，$z=\pm2i$ 是一级极点，$z=1$ 是二级极点.

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),-2i]&=\lim_{z\to-2i}(z+2i)\frac{2z+3}{(z+2i)(z-2i)(z-1)^2}\\&=\frac{-4i+3}{-4i(-2i-1)^2}=-\frac{i}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),2i]&=\lim_{z\to2i}(z-2i)\frac{2z+3}{(z+2i)(z-2i)(z-1)^2}\\&=\frac{4i+3}{4i(2i-1)^2}=\frac{i}{4},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{2z+3}{(z^2+4)(z-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{-2z^2-6z+8}{(z^2+4)^2}=0.$$

(3) $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots,$$
$$0<|z-1|<+\infty,$$

故 $$\mathrm{Res}[f(z),1]=c_{-1}=1.$$

(4) 因为

$$\sin z+\cos z=\sqrt{2}\left(\sin z\cos\frac{\pi}{4}+\cos z\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $z_k=k\pi-\dfrac{\pi}{4}\quad(k=0,\pm 1,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的一级极点.

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\lim_{z\to z_k}\left(z-k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}-k\pi\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad k=0,\pm 1,\cdots\left(z\to k\pi-\frac{\pi}{4}\right).$$

(5) $z=\mathrm{i}$ 是一级极点，因 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z+\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1}{z-\mathrm{i}}$，用柯西公式，有

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}=\left.\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}.$$

(6) $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点，用洛朗展开式，有

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$1-\cos z=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

故 $$\frac{\mathrm{e}^z}{1-\cos z}=\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+\cdots,$$

所以 $$\text{Res}\left[\frac{e^z}{1-\cos z},0\right]=c_{-1}=2.$$

例 4 求下列函数在有限奇点 z_0 处的留数：

$$\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n},\ (\varphi(z_0)\neq 0).$$

解 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点，用规则 Ⅱ，有

$$\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^n}\left[(z-z_0)^n\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\right]_{z=z_0}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(z_0).$$

例 5 求下列函数在指定点的留数：

(1) $\dfrac{\cot\pi z}{(z-a)^2}$, $z=a,k$; (2) $e^{z+1/z}$, $z=0$;

(3) $\dfrac{1}{z\sin z}$, $z_k=k\pi$; (4) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $z=-1$.

解 (1) $z=a$ 是二级极点，$z=k$ 是一级极点.

当 a 不是整数时，有

$$\text{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2\frac{\cot\pi z}{(z-a)^2}\right]=-\pi\csc\pi a;$$

当 a 是整数时，令 $z-a=\zeta$，则 $z=a+\zeta$，有

$$\frac{\cot\pi z}{(z-a)^2}=\frac{1}{\zeta^2}\frac{\cos\pi\zeta}{\sin\pi\zeta}=\frac{1}{\zeta^2}\cdot\frac{1-(\pi\zeta)^2/2!+\cdots}{\pi\zeta-(\pi\zeta)^3/3!+\cdots}$$
$$=\frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{3}\zeta^2+\cdots\right).$$

所以 $$\text{Res}[f(z),a]=-\frac{\pi}{3},$$

$$\text{Res}[f(z),k]=\left.\frac{\cos\pi z}{[(z-a)^2\sin\pi z]'}\right|_{z=k}=\frac{1}{\pi(k-a)^2}.$$

(2) $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

$$e^{z+1/z}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,$$

其中　　$c_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!},\quad n=0,1,2,\cdots.$

所以　　$$\text{Res}[f(z),0]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}$$

(3) $z_k=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是二级极点，$z=0$ 是一级极点，所以

$$\text{Res}[f(z),k\pi]=\frac{1}{(z\sin z)'}\bigg|_{z=k\pi}=\frac{1}{\sin z+z\cos z}\bigg|_{z=k\pi}$$
$$=(-1)^k\frac{1}{k\pi},$$

$$\text{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\frac{1}{z\sin z}\right]=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-\cos z\cdot z}{(\sin z)^2}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{1-\cos z}{\sin z}\overset{L'}{=\!=}\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\cos z}=0.$$

(4) $z=-1$ 是 n 级极点，所以

$$\text{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z+1)^n\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}\right]$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}2n\cdot(2n-1)\cdots(n+2)z^{n+1}$$
$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}(-1)^{n+1}.$$

例 6　求下列函数在扩充复平面的留数：

(1) $z^2e^{1/z}$；　　　　(2) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$；

(3) $\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$ $(a\neq b, f(z)$ 在全平面解析，且 $|f(z)|\leqslant M$，M 为某个正数).

解　(1) $z=0$ 为本性奇点，$z=\infty$ 为二级极点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$
$$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\cdots,$$

故 $$\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\frac{1}{6}.$$

令 $z=\frac{1}{w}$，则 $f(z)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w^2}e^w$，它在 $w=0$ 的某去心邻域内的洛朗级数为

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w^2}\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}+\frac{1}{2!}+\frac{w}{3!}+\cdots,\quad 0<|w|<+\infty,$$

所以 $$\text{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{6}.$$

(2) $z=0$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是可去奇点.

在 $0<|z|<+\infty$ 内，有

$$\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)+\frac{1}{z^2},$$

所以 $$\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=1.$$

令 $z=\frac{1}{w}$，则 $f(z)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\sin w+w^2$，它在 $w=0$ 的某去心邻域内的洛朗级数为

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\cdots\right)+w^2$$
$$=w+w^2-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\cdots,\quad 0<|w|<+\infty.$$

所以 $$\text{Res}[f(z),\infty]=0.$$

(3) 设 $f(a)\neq 0$，$f(b)\neq 0$. $z=a$，$z=b$ 为一级极点. 又 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}=0$，$z=\infty$ 为可去奇点.

$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},a\right]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$$
$$=\frac{f(a)}{a-b},$$
$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},b\right]=\frac{f(b)}{b-a},$$

$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},\infty\right]=-\left[\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}\right]$$
$$=\frac{f(a)-f(b)}{b-a}.$$

又 $z=\infty$ 是二级零点，故

$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},\infty\right]=-\lim_{z\to\infty}z\cdot\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}=0$$

或 $\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},\infty\right]=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$，其中 $R>\max(|a|,|b|)$. 由于

$$\left|\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|<R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right|<\frac{MR}{(R-|a|)(R-|b|)}\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

所以
$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)},\infty\right]=0,$$

即
$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=0\Rightarrow f(b)=f(a).$$

例 7 求下列函数在 $z=\infty$ 的留数：

(1) e^{1/z^2}； (2) $\cos z-\sin z$； (3) $\frac{2z}{3+z^2}$；

(4) $\frac{e^z}{z^2-1}$； (5) $\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$.

解 (1) $e^{1/z^2}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\cdots$，不含正幂项，因而点 ∞ 是可去奇点，所以

$$\text{Res}[f(z),\infty]=0.$$

(2) $\cos z-\sin z=1-z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$，含无穷多正幂项，所以点 ∞ 是本性奇点，所以

$$\text{Res}[f(z),\infty]=0.$$

(3) $$\frac{2z}{3+z^2}=2z\frac{1}{z^2(1+3/z^2)}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1+3/z^2}$$
$$=\frac{2}{z}\left(1+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^4}-\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{z} - \frac{6}{z^3} + \frac{18}{z^5} + \cdots, \quad \sqrt{3} < |z| < +\infty,$$

所以 $$\operatorname{Res}[f(z),\infty] = -2.$$

(4) 因为 $z = \pm 1$ 是 $f(z)$ 一级极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z+1} = \frac{e}{2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to -1} \frac{e^z}{z-1} = -\frac{1}{2}e^{-1},$$

所以 $$\operatorname{Res}[f(z),\infty] = -\operatorname{Res}[f(z),1] - \operatorname{Res}[f(z),-1]$$

$$= \frac{-1}{2}(e - e^{-1}) = -\operatorname{sh}1.$$

(5) 在 $4 < |z| < +\infty$ 内，洛朗展开式为

$$f(z) = \frac{1}{z \cdot z^4(1+1/z)^4(1-4/z) \cdot z}$$

$$= \frac{1}{z^6}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \cdots\right)^4\left(1 + \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} + \cdots\right).$$

显然 $c_{-1} = 0$(无正幂项)，故 $\operatorname{Res}[f(z),\infty] = 0$.

例 8 求函数 $\dfrac{z^{13}}{(z^2-1)(z^8+1)}$ 在复平面上所有有限奇点处留数的和.

解 函数 $f(z)$ 有十个有限奇点，要一一算出是困难的，利用扩充复平面上留数和的定理，有

$$\sum \operatorname{Res}[f(z),z_k] = -\operatorname{Res}[f(z),\infty].$$

在 $1 < |z| < +\infty$ 内，展开为洛朗极数，即

$$f(z) = \frac{z^{13}}{z^2(1-z)^2 z^8(1+1/z)}$$

$$= z^3\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{16}} + \cdots\right)$$

$$= z^3 + z + \frac{1}{z} + \cdots,$$

所以 $$\operatorname{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1} = -1,$$

$$\sum \operatorname{Res}[f(z),z_k] = -\operatorname{Res}[f(z),\infty] = 1.$$

二、利用留数计算复变函数的积分

利用留数计算复变函数积分的依据是留数定理，留数定理将沿闭曲线 C 的积分计算转化为对被积函数在 C 内的各孤立奇点的留数的计算. 因此，弄清曲线 C 内有限奇点的个数、类型并正确计算其留数是计算复变函数积分的关键.

对开路的复变函数积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$，可添加曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，使

$$C + C_1 + C_2 + \cdots + C_k = \Gamma$$

为封闭曲线，然后利用留数定理求得 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$. 于是

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z - \cdots - \int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

关键是 $\int_{C_i} f(z)\mathrm{d}z$ 应易于求得.

例 9 利用留数计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=3/2} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$；　(2) $\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$；

(3) $\oint_{|z|=3/2} \frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z$ （其中 m 为整数）；

(4) $\oint_{|z-2i|=1} \mathrm{th} z\mathrm{d}z$；　(5) $\oint_{|z|=3} \tan\pi z\mathrm{d}z$；

(6) $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n}$

（其中 n 为正整数，且 $|a| \neq 1, |b| \neq 1, |a| < |b|$）.

解 (1) C 内只有 $z=0$ 一个可去奇点，因而

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\sin z}{z} = 0,$$

所以
$$\oint_{|z|=3/2} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

(2) C 内只有 $z=1$ 一个二级极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\right]=2\mathrm{e}^2,$$

所以 $$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{e}^2=4\pi\mathrm{e}^2\mathrm{i}.$$

(3) 由于 m 不确定，故用在 $0<|z|<3/2$ 展开 $f(z)$ 的方法来求留数，即

$$\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1}{z^m}\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{z^{m-2}}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\frac{1}{6!}z^4-\cdots\right),$$

所以，当 $m\geqslant 3$ 且为奇数时，设 $m=2n+1$，则

$$c_{-1}=(-1)^{(m-3)/2}\frac{1}{(m-1)!}$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\oint_{|z|=3/2}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z=(-1)^{m-3/2}\frac{2\pi\mathrm{i}}{(m-1)!}=(-1)^{n-1}\frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!}.$$

在其它情况下，$c_{-1}=0$，$\oint_{|z|=3/2}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z=0.$

(4) 在 C 内只有 $z=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$ 一个一级极点，且

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right]=1 \quad \text{(见本节例 1(8))},$$

所以 $$\oint_{|z-2\mathrm{i}|=1}\operatorname{th}z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}.$$

(5) 在 C 内有六个一级极点

$$z_k=k+\frac{1}{2}\ (k=0,\pm 1,\pm 2,-3),$$

由于 $$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=\left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=z_k}=\frac{-1}{\pi},$$

所以 $$\oint_{|z|=3}\tan\pi z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_k\operatorname{Res}[f(z),z_k]=-12\mathrm{i}.$$

(6) $z=a$ 和 $z=b$ 为 $f(z)$ 的 n 级极点. 因而

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}$$
$$=\frac{(-1)^n}{[(n-1)!]^2}(2n-2)!(b-a)^{1-2n}.$$

类似地,有

$$\mathrm{Res}[f(z),b]=\frac{(-1)^2}{[(n-1)!]^2}(2n-2)!(a-b)^{1-2n}.$$

当 $|a|<|b|<1$ 时,点 a 与 b 在 C 内,则

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z=0\quad（留数抵消）;$$

当 $1<|a|<|b|$ 时,C 内无奇点,$f(z)$ 解析,则

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n}=0;$$

当 $|a|<1<|b|$ 时,C 内只一个极点 $z=a$,则

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{(-1)^n(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}2\pi\mathrm{i}.$$

例 10 计算下列积分:

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\mathrm{d}z$;

(3) $\oint_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{2\cos z}{(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})(z-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z$. (4) $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{1/z}\mathrm{d}z$;

解 (1) 在 C 内有四个奇点 $z=\pm\mathrm{i},\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$,在 C 外有一个可去奇点 $z=\infty$. 因而

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\lim_{z\to\infty}z\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=0,$$

所以 $$\oint_{|z|=2}\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot 0=0.$$

(2) 在 C 内只一个二级极点 $z=0$. 因而

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}) = (a-b)\mathrm{i},$$

所以 $$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi(b-a).$$

(3) C 内只有一个三级极点 $z = \mathrm{i}$. 因而

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to \mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})^3 \frac{2\cos z}{(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})(z-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z\right]$$

$$= \frac{-\cos \mathrm{i}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}} = -\frac{1}{2}.$$

所以 $$\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{2\cos z}{(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi \mathrm{i}.$$

(4) C 内有两个孤立奇点 $z = 0, -1$, C 外有一个 $z = \infty$. 在 $|z| > 2$ 内,洛朗级数为

$$\frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{1/z} = z^2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$\cdot\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right)$$

$$= z^2\left(1 + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} + \cdots\right).$$

因而 $$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \frac{1}{3},$$

所以 $$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z}\mathrm{e}^{1/z}\mathrm{d}z = -\frac{2}{3}\pi \mathrm{i}.$$

注意 例9和例10中的积分并非一定要利用留数才能求出,用第三章中的高阶导数公式和柯西积分公式也能计算其中的一些积分,只是难度不同而已. 在用留数求积分时,不可死套公式,而要灵活运用. 当 C 内极点较多时,一般不逐个计算留数,而将 $f(z)$ 展开为洛朗级数求 c_{-1};当极点级数较高,也可用展开为洛朗级数或高阶导数公式来求;当 C 内孤立奇点多而 C 外孤立奇点少时,还可计算 C 外奇点的留数代替. 总之,方法是固定的,运用是灵活的,读者一定要多加练习,熟能生巧.

例 11 计算 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $C: x^2 + y^2 = 2(x+y)$.

解 $x^2+y^2=2(x-y)$ 即圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. 因此 C 内有二级极点 $z=1$ 和一级极点 $z=\mathrm{i}$,故

$$I=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left\{\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]'+\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z-1)^2(z+\mathrm{i})}\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}.$$

例 12 计算 $\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{i}}{z^2+2az-1}\mathrm{d}z,\ a>1.$

解 $z=-a+\sqrt{a^2-1}$ 和 $-a-\sqrt{a^2-1}$ 为 $f(z)$ 的一级极点,因为 $z>1$,所以 $z=-a-\sqrt{a^2-1}$ 不在 C 内.

$$I=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),A]=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to A}\frac{2\mathrm{i}}{z+a+\sqrt{a^2-1}}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{2\mathrm{i}}{2\sqrt{a^2-1}}=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

其中 $$A=-a+\sqrt{a^2-1}.$$

例 13 设 C 是 z 平面上一条不经过点 $z=0$ 和 $z=1$ 的正向简单闭曲线,试就 C 的各种情况计算积分

$$\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z.$$

解 $z=0$ 和 $z=1$ 是被积函数的奇点. 先计算各奇点的留数.

在圆环域 $0<|z|<1$ 内,有

$$\frac{\cos z}{z^3(z-1)}=\frac{-1}{z^3}(1+z+z^2+z^3+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)$$

$$=-(z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}+1+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}-\cdots,$$

所以 $$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{2}.$$

$z=1$ 是一级极点,依规则 Ⅰ,有

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\cos z}{z^3(z-1)}=\cos 1.$$

讨论 C 与奇点的相对位置，即

若 $z=0$ 与 $z=1$ 在 C 外，则积分 $I=0$.

若 $z=0$ 在 C 内，$z=1$ 在 C 内，则 $I=-\pi i$.

若 $z=0$ 在 C 内，$z=1$ 在 C 内，则 $I=2\pi i\cos 1$.

若 $z=0,1$ 均在 C 内，则 $I=2\pi i\left(\cos 1-\frac{1}{2}\right)$.

例 14 已知 $a\neq 0, f(z)=\frac{z-a}{z+a}$，计算 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$，其中 C 是圆域 $|z|<|a|$ 内围绕原点的任一正向简单闭曲线.

解 C 内只有一个 $n+1$ 级极点 $z=0$，所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),0]&=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)\\&=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{2a}{(z+a)^2}\right]\\&=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[\frac{(-1)2!2a}{(z+a)^3}\right]=\cdots\\&=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left[(-1)^{n-1}\frac{n!2a}{(z+a)^{n+1}}\right]\\&=(-1)^{n-1}2a^{-n},\end{aligned}$$

所以 $$I=2\pi i(-1)^{n-1}2a^{-n}=(-1)^{n-1}4\pi a^{-n}i.$$

例 15 计算积分 $\oint_{|z|=3}\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz$.

解 由于 C 内共有六个奇点

$$z=\pm\sqrt{5}i \quad 和 \quad e^{(2k+1)\pi i/4}\quad (k=0,1,2,3),$$

计算留数相当麻烦，利用留数和的定理，可使计算简单.

在 $3<|z|<+\infty$ 内，有

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z^{13}}{z^6(1+5/z^2)^3z^8(1+1/z^4)^2}\\&=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+5/z^2}\right)^3\left(\frac{1}{1+1/z^4}\right)^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{5}{z^2} + \frac{25}{z^4} - \cdots\right)^3\left(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} + \cdots\right)^2$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{15}{z^2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{2}{z^4} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \cdots,$$

因而 $\qquad \mathrm{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1} = -1,$

所以 $\qquad I = 2\pi\mathrm{i}[-(-1)] = 2\pi\mathrm{i}.$

例 16 计算积分 $\oint_{|z|=3/2} \dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}\mathrm{d}z.$

解 在 C 内有五个奇点，在 C 外有两个，$z=3$ 和 $z=\infty$. 利用留数和的定理，先计算 C 外孤立奇点的留数.

$$\mathrm{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{242}.$$

在 $3 < |z| < +\infty$ 内，有

$$f(z) = \frac{1}{z(1-3/z)z^5(1-1/z^5)} = \frac{1}{z^6}\cdot\frac{1}{1-3/z}\cdot\frac{1}{1-1/z^5}$$

$$= \frac{1}{z^6}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z^5} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^6} + \cdots,$$

即 $\qquad \mathrm{Res}[f(z),\infty] = 0,$

所以 $\qquad I = 2\pi\mathrm{i}\left[0 - \frac{1}{242}\right] = -\frac{\pi\mathrm{i}}{121}.$

例 17 计算积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}$ $\quad(a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}, a > 0)$，其中 C 是自下而上的直线 $x = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

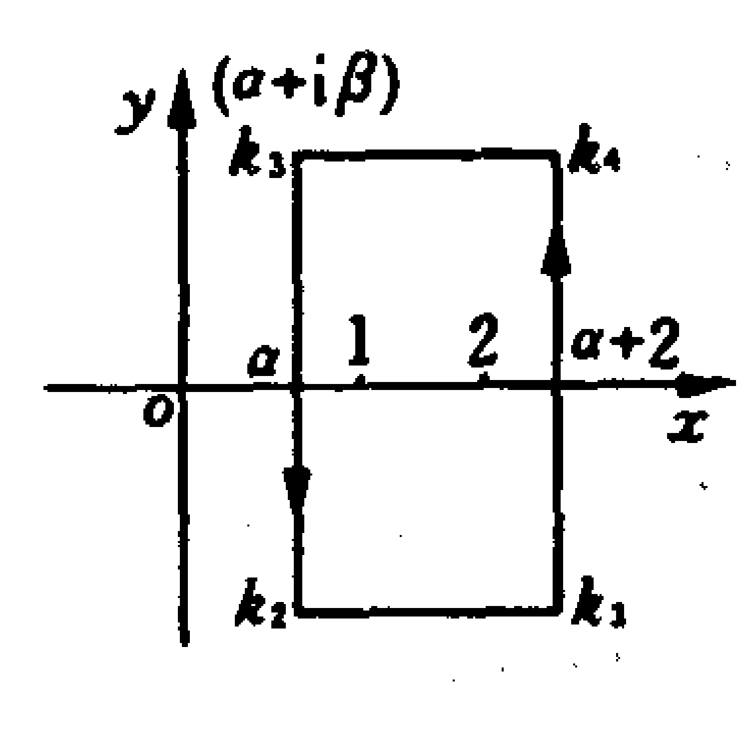


图 5.1

解 作如图 5.1 所示的线形线路 $\Gamma(k_1k_2k_3k_4k_1)$，在 Γ 内有两个一级极点 $z=1$ 和 $z=2$. 依留数定理，有

$$I = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}$$

$$= \mathrm{Res}[f(z),1] + \mathrm{Res}[f(z),2]$$

$$= \left.\frac{1}{(a^z\sin\pi z)'}\right|_{z=1} + \left.\frac{1}{(a^z\sin\pi z)'}\right|_{z=2}$$

$$=-\frac{1}{\pi a}+\frac{1}{\pi a^2}.$$

因为$\overrightarrow{k_1k_2}$和$\overrightarrow{k_3k_4}$方向相反，$\overrightarrow{k_3k_4}$上 z 值比$\overrightarrow{k_1k_2}$上大 2，有

$$\int_{\overline{k_3k_4}}\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}=-\frac{1}{a^2}\int_{\overline{k_1k_2}}\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\int_{\overline{k_1k_2}}+\int_{\overline{k_2k_3}}+\int_{\overline{k_4k_1}}\right]\frac{\mathrm{d}z}{a^2\sin\pi z}=-\frac{1}{\pi a}+\frac{1}{\pi a^2}.$$

又
$$\left|\int_{\overline{k_2k_3}}\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}\right|\leqslant\int_a^{a+2}\frac{\mathrm{d}x}{a^x\mathrm{sh}\pi\beta}\to 0\quad(\beta\to\infty),$$

$$\left|\int_{\overline{k_4k_1}}\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}\right|\leqslant\int_a^{a+2}\frac{\mathrm{d}x}{a^x\mathrm{sh}\pi\beta}\to 0\quad(\beta\to\infty),$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{\overline{k_1k_2}}\frac{\mathrm{d}z}{a^2\sin\pi z}=-\int_C\frac{\mathrm{d}z}{a^2\sin\pi z},$$

则
$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{a^2\sin\pi z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\int_C\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}$$
$$=-\frac{1}{\pi a}+\frac{1}{\pi a^2}.$$

所以
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{a^z\sin\pi z}=\frac{1}{\pi(1+a)}.$$

三、利用留数与留数定理证明命题

例 18 设 $f(z)$ 在 $0<|z-a|\leqslant r_0$ 上解析，a 是 $f(z)$ 的一级极点，Γ_r 是在圆周 $|z-a|=r\leqslant r_0$ 上取的一段弧，从 a 到 Γ_r 所张的角为 θ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，如果$\lim\limits_{r\to 0}\theta_r=\theta$，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}f(z)\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\theta\mathrm{Res}[f(z),a],$$

其中 Γ_r 对于 a 取顺时针方向.

证 设 $\mathrm{Res}[f(z),a]=c_{-1}$，则 $f(z)=\dfrac{c_{-1}}{z-a}+g(z)$，$g(z)$ 在点 a 解析. 当 $|z-a|\leqslant r\leqslant r_0$ 时，$|g(z)|\leqslant M$. 所以

$$\left|\int_{\Gamma_r}g(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant M2\pi r(r\leqslant r_0),\quad \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}g(z)\mathrm{d}z=0.$$

设 Γ_r 上始点为 $a+re^{i\varphi_1}$，终点为 $a+re^{i\varphi_2}$，则

$$\int_{\Gamma_r}\frac{c-1}{z-a}\mathrm{d}z=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}c_{-1}\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi=c_{-1}\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)=-c_{-1}\mathrm{i}\theta_r.$$

而$\lim\limits_{r\to 0}\theta_r=\theta$，故

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1}\mathrm{i}\theta=-\mathrm{i}\theta\mathrm{Res}[f(z),\theta].$$

例 19 设 $\varphi(z)$ 在 a 点的邻域内解析，$\varphi'(a)\neq 0$，$f(\zeta)$ 以 ζ_0 为一级极点且 $\mathrm{Res}[f(\zeta),\zeta_0]=A$，试证复合函数 $f[\varphi(z)]$ 在 a 点的留数 $\mathrm{Res}[f[\varphi(z)],a]=\dfrac{A}{\varphi'(a)}$.

证 由泰勒展开式，有

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots\\&\quad+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots\\&=\varphi(a)+h(z)(z-a),\end{aligned}$$

$$h(z)=\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}+\cdots,$$

由 $h(a)=\varphi'(a)\neq 0\Longrightarrow$ 在 a 的邻域内 $h(z)\neq 0$.

函数 $f(\zeta)$ 以 ζ_0 为简单极点，且 $\mathrm{Res}[f(\zeta),\zeta_0]=A$ 的充要条件是：$f(\zeta)$ 在 ζ_0 的某去心邻域内的洛朗展开式的负幂项只有 $\dfrac{c_{-1}}{\zeta-\zeta_0}$，且 $c_{-1}=A\neq 0$. 设 $f(\zeta)$ 在 ζ_0 去心邻域内的洛朗展开式为

$$f(\zeta)=\frac{A}{\zeta-\zeta_0}+c_0+c_1(\zeta-\zeta_0)+\cdots\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{g(\zeta)}{\zeta-\zeta_0},$$

其中 $g(\zeta)$ 在 ζ_0 的邻域内解析，且 $g(\zeta_0)=A\neq 0$（即在 ζ_0 邻域内 $g(\zeta)\neq 0$）. 由此

$$f[\varphi(z)]=\frac{g[\varphi(z)]}{\varphi(z)-\varphi(a)}=\frac{g[\varphi(z)]}{(z-a)h(z)}$$

以 a 为一级极点. 于是

$$\mathrm{Res}[f[\varphi(z)],a]=\lim_{z\to a}(z-a)f[\varphi(z)]=\lim_{z\to a}\frac{g[\varphi(z)]}{h(z)}$$

$$= \frac{g[\varphi(a)]}{h(a)} = \frac{A}{\varphi'(a)}.$$

例 20 设 $c > 0$，Γ 为直线 $\mathrm{Re}(z) = c$，证明：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = \begin{cases} \ln a, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

证 当 $a > 1$ 时，取 $R(>c)$ 为正数，在直线 $\mathrm{Re}(z) = c$ 左侧，以 $z = c$ 为圆心、R 为半径作半圆 C_R，C_R 与直线 $\mathrm{Re}(z) = c$ 构成闭曲线 C. 则函数$\frac{a^z}{z^2}$在 C 内有一个二级极点 $z = 0$. 于是

$$\int_C \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),0] = 2\pi \mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(a^z) = 2\pi \mathrm{i}\ln a.$$

即
$$\int_{c-\mathrm{i}R}^{c+\mathrm{i}R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\ln a.$$

估计积分$\int_{C_R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z$，即

$$\left|\int_{C_R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|\mathrm{e}^{z\ln a}|}{|z^2|}|\mathrm{d}z| = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|\mathrm{e}^{\ln a(c+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}|}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + c|^2}R\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \frac{R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{e}^{R\ln a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\ln a\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \frac{2R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\ln a\frac{2}{\pi}t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}(1-\mathrm{e}^{-R\ln a}) \to 0 \quad (R\to\infty, a>1),$$

所以，当 $R \to \infty$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = \ln(a) \quad (a > 1).$$

当 $0 < a < 1$ 时，在直线 $\mathrm{Re}(z) = c$ 的右侧，以 $z = c$ 为圆心、R 为半径作半圆 C_R，C_R 与直线 $\mathrm{Re}(z) = c$ 构成闭曲线 C，则函数$\frac{a^z}{z^2}$在 C 内解析. 故

$$\int_C \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z + \int_{c-\mathrm{i}R}^{c+\mathrm{i}R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = 0.$$

由于 $$\left|\int_{C_R} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\left|\mathrm{e}^{\ln a(c+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\right|}{(R-c)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{R\ln a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2R}{(R-c)^2}\mathrm{e}^{c\ln a}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\ln\frac{1}{a}\sin\theta}\mathrm{d}\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

且 $0<a<1$，$\frac{1}{a}>1$，所以上式右边 $\to 0$ ($R\to\infty$ 时). 则令 $R\to\infty$，便有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z = 0 \ (0<a<1).$$

例 21 设 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=A$，证明

$$\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0] = A\varphi(z_0).$$

证 由于 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，$f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数为

$$f(z) = \frac{c-1}{z-z_0} + g(z) = \frac{A}{z-z_0} + g(z),$$

所以，$f(z)\varphi(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数为

$$f(z)\varphi(z) = \frac{A\varphi(z)}{z-z_0} + g(z)\varphi(z).$$

由于 $g(z)\varphi(z)$ 在 z_0 解析，故 z_0 为 $f(z)\varphi(z)$ 一级极点.

例 22 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在复平面上解析，证明：对任一正整数 k，函数 $\frac{f(z)}{z^k}$ 在点 $z=0$ 的留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z^k},0\right]=a_{k-1}$.

证 因为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，所以

$$\frac{f(z)}{z^k} = a_0 z^{-k} + a_1 z^{-k+1} + \cdots + a_{k-1}z^{-1} + a_k + \cdots,$$

故 $$\mathrm{Res}[f(z)/z^k,0]=c_{-1}=a_{k-1}.$$

第三节　留数在定积分计算上的应用

主 要 内 容

1. 形如 $\int_0^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

$R(\cos\theta,\sin\theta)$ 为 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的有理函数. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$, $\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$, 积分化为

$$\oint_{|z|=1}R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k],$$

其中 $z_k(k=1,2,\cdots)$ 为包含在 $|z|=1$ 内 $f(z)$ 的孤立奇点.

2. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

$R(x)$ 是 x 的有理函数,分母的次数至少比分子的次数高二次,且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

若 $R(x)$ 为偶函数,则

$$\int_{0}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k],$$

其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的极点.

3. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的积分

$R(x)$ 是 x 的有理函数,分母的次数至少比分子的次数高一次,且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{i}az}, z_k]$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{i}az}, z_k],$$

其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的极点.

疑难解析

1. 利用留数计算定积分要注意哪些问题?

答 因为留数 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$,可知留数是与封闭曲线上的复变函数积分联系在一起的,所以要利用留数来计算实积分,需要解决两个问题:一是将定积分的积分区间(实轴或实轴上线段)转化为闭曲线,二是将定积分的被积函数(实函数)转化为复函数.

转化区间一般采用代换(如 $z = e^{\mathrm{i}\theta}$)或添加辅助曲线(如半圆周或折线段)并辅以极限概念来实现. 将实初等函数转化为复初等函数(实积分的被积函数一般是实初等函数)比较容易做到,一般只要将 x 改为 z 就可以了.

比较关键的是,要准确地找出积分线路 C 内的全部奇点,才能计算留数求出实积分.

2. 对于形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 和形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x$ 类型的实积分,如果实轴上存在孤立奇点,应怎样处理?

答 对于形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 和形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x$ 类型实积分的情形,要求在实轴上没有孤立奇点,才可以用留数计算定积分. 如果实轴上有孤立奇点,一般的处理方法是:以孤立奇点为圆心、r 为半径作半个小圆周. 如果取上半小圆周 C_r,则孤立奇点就在上

半平面外(因为 C_r 与实轴组成 C 的一部分);如果取下半小圆周 C_r,则孤立奇点就在下半平面内.计算时要取 $r\to 0$ 时的极限(见例 15,17,19,22)

方法、技巧与典型例题分析

用留数计算定积分没有特别的方法和技巧,首先是分清类型、验证条件、确定孤立奇点及类型.计算留数的方法和技巧在上一节已经讲过,就不重复了.

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ **型积分**

一般采用代换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$,从而 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$. 当 θ 从 0 变到 2π,点 z 就描出一个正向单位圆周 $|z|=1$,只要被积函数在 $|z|=1$ 上无奇点,即可应用留数定理.

例 1 计算下列积分:

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$; (2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ $(a>b>0)$.

解 (1) 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,将 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$ 代入原式,得

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}=\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{3(z+3\mathrm{i})(z+\mathrm{i}/3)}.$$

被积函数在 $|z|=1$ 内只有一个一级极点 $z=-\mathrm{i}/3$. 而

$$\mathrm{Res}[R(z),-\mathrm{i}/3]=\lim_{z\to-\mathrm{i}/3}\frac{2}{3(z+3\mathrm{i})}=-\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

所以 $$I=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[R(z),-\frac{\mathrm{i}}{3}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 将 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\cos z=\frac{z^2+1}{2z}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$ 代入,得

$$I=\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}\mathrm{d}z.$$

在 $|z|=1$ 内有二级极点 $z=0$，一级极点 $z_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，所以

$$I=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\mathrm{Res}[R(z),0]+\mathrm{Res}\left[R(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right\}$$

$$=-\pi\left\{\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z^2-1)^2}{bz^2+2az+b}\right)\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to z_1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2[z-(-a-\sqrt{(a^2-b^2)}/b]}\right\}$$

$$=-\pi\left(\frac{-2a}{b^2}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right)=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

例 2 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2x}$，$a>0$； (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$，$n$ 为正整数.

解 将 $\sin^2x$ 先化为 $\frac{1}{2}(1-\cos2x)$，再进行代换.

$$I=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2x}=\int_0^\pi\frac{2\mathrm{d}x}{2a+1-\cos2x}=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{2a+1-\cos t}$$

$$=2\mathrm{i}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a+1)z+1},$$

$z_1=2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$ 在 $|z|=1$ 内，$z_2=2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$ 在 $|z|$ 外，且 z_1 为一级极点，依留数定理，有

$$I=2\pi\mathrm{i}\cdot2\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[R(z),z_1]$$

$$=-4\pi\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-2a-1-\sqrt{(2a+1)^2-1}}$$

$$=-4\pi\frac{-1}{2\sqrt{(2a+1)^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

(2) 将 $\cos x=\dfrac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$ 代入，得

$$I=\int_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{1}{2^{2n}\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z,$$

$z=0$ 是 $2n+1$ 级极点，依留数定理，有

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2^{2n} i} \lim_{z \to 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} [(z^2 + 1)^{2n}]$$

$$= \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} C_{2n}^{n} = \frac{\pi}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

例如，求积分$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta$ 的值，利用题(2) 的结果，令 $n = 2$，即得

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{32}.$$

例 3　计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi} \tan(\theta + ib) d\theta$, b 为实数且不为零；

(2) $\int_0^{2\pi} \cot(\theta + b) d\theta$, b 为复数，且 $\mathrm{Im}(b) \neq 0$.

解　此两题类似于第 1 种类型，但又有所不同. 要注意代换的形式，使得$[0,\pi]$ 能化为圆周.

(1) 令 $z = e^{2i(\theta+ib)}$, $dz = e^{2i(\theta+ib)} 2i d\theta$, $d\theta = \frac{dz}{2iz}$.

$$\tan x = -i \frac{e^{2ix}}{e^{2ix} + 1} \Rightarrow \tan(\theta + ib) = -i \frac{z-1}{z+1}.$$

当 θ 从 0 变到 π 时，z 点可描成圆周 $|z| = e^{-2b}$. 代入，得

$$I = \oint_{|z|=e^{-2b}} -i \frac{z-1}{z+1} \frac{dz}{2iz} = -\frac{1}{2} \oint_{|z|=e^{-2b}} \frac{z-1}{z(z+1)} dz.$$

在 $|z| = e^{-2b}$ 内的奇点要讨论. 当 $b > 0$ 时，C 内只有一级极点 $z = 0$；当 $b < 0$ 时，C 内有两个一级极点 $z = 0$ 和 $z = -1$.

当 $b > 0$ 时，依留数定理，有

$$I = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \mathrm{Res}[R(z), 0] = -\pi i \cdot \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{z-1}{z(z+1)} = \pi i;$$

当 $b < 0$ 时，依留数定理，有

$$I = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \{\mathrm{Res}[R(z), 0] + \mathrm{Res}[R(z), -1]\}$$

$$= -\pi i \left[\lim_{z \to 0} z \frac{z-1}{z(z+1)} + \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{z-1}{z(z+1)}\right] = -\pi i.$$

故 $$\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}b)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\pi\mathrm{i}, & b>0,\\ -\pi\mathrm{i}, & b<0.\end{cases}$$

(2) 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+b)}$，设 $b=A+\mathrm{i}B$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+b)}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{i}z}$. 当 θ 从 0 变到 2π 时，z 点描成圆周 $|z|=\mathrm{e}^{-B}$ 正向（$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+b)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+A+B\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-B}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+A)}$）. 由

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1},$$

有 $$\cot(\theta+b)=\mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1}.$$

代入，得 $$\int_0^{2\pi}\cot(\theta+b)\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=\mathrm{e}^{-B}}\frac{z+1}{z(z-1)}\mathrm{d}z.$$

被积函数共有两个有限奇点 $z=0$ 和 $z=1$.

当 $B>0$ 时，$z=0$ 在 $|z|=\mathrm{e}^{-B}$ 内，故

$$I=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z),0]=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\cdot z\,\frac{z+1}{z(z-1)}=-2\pi\mathrm{i}.$$

当 $B<0$ 时，$z=0$ 与 $z=1$ 在 $|z|=\mathrm{e}^{-B}$ 内，故

$$\begin{aligned}I&=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[R(z),0]+\mathrm{Res}[R(z),1]\}\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z(z-1)}+\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z+1}{z(z-1)}\right]=2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

故 $$\int_0^{2\pi}\cot(\theta+b)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & B<0,\\ -2\pi\mathrm{i}, & B>0.\end{cases}$$

例 4 计算积分 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，$n$ 为自然数.

解 虽然被积函数不是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数，但也可以用变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 归为留数的计算.

$$\begin{aligned}I_0&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(n\theta-\sin\theta)-\mathrm{i}\sin(n\theta-\sin\theta)]\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\theta-\sin\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$I_0=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{2\pi\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$= \text{Res}[R(z), 0] = 2\pi \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} (e^z)^{(n)} = \frac{2\pi}{n!}.$$

因为 $$I_0 = I + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta) d\theta,$$

由实部与虚部的对应关系，知

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!},$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta) d\theta = 0.$$

此题的技巧在于，将所求积分作为实部，再配上一个虚部的积分，组合成一个可以进行代换的积分，进行计算. 其结果按实部对应实部、虚部对应虚部即可写出. 当然，根据实际情况，所求积分亦可作为虚部出现.

例 5 计算积分 $\int_0^{2\pi} \cos^4 4\theta d\theta$.

解 利用变换，有

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} \right)^4 \frac{1}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \quad (令\ z = e^{i\theta})$$

$$= \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^4 + e^{-4}}{2} \right)^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}} dz.$$

在 $|z| = 1$ 内，有一个十七级极点. 展开 $R(z)$ 为洛朗级数，有

$$\frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}} = \frac{z^{15}}{16} \left(1 + \frac{1}{z^8} \right)^4 = \frac{z^{15}}{16} \left(1 - \frac{4}{z^8} + \frac{6}{z^{16}} - \frac{15}{z^{24}} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{16} \left(z^{15} - 4z^7 + \frac{6}{z} - \frac{15}{z^9} + \cdots \right),$$

所以 $$\int_0^{2\pi} \cos^4 4\theta d\theta = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^8+1)^4}{16z^{17}} d\theta$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi.$$

例 6 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\cos\theta + p^2} d\theta \quad (0 < p < 1)$.

解 作代换 $z = e^{i\theta}$，得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{i} \cdot \frac{dz}{-pz^2 + (p^2-1)z - p}$$

$$= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{p(z-p)(z-1/p)}.$$

在 $|z|=1$ 内有一级极点 $z=p$. 依留数定理，有

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{i}\right)\mathrm{Res}[f(z),p]$$

$$= -2\pi\lim_{z\to p}(z-p)\frac{1}{(z-p)p(z-1/p)} = \frac{2z}{p^2-1}.$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$ 型积分

注意　被积函数应满足条件：$R(x)$ 为 x 有理函数，分母幂次数至少高于分子两次. $R(x)$ 在实轴上无奇点. 若有奇点，用疑难解析 2 中提示方法可解决. 关键在于准确找出上半平面的全部孤立奇点.

例 7　计算下列定积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；　　(2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$.

解　(1) $R(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$，分母幂次数高于分子四次，实轴上无奇点，上半平面内有二级极点 $z=i$，所以

$$I = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}[R(z),i] = 2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $R(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$，分母幂次数高于分子两次，实轴上无奇点，而

$$1+z^4 = \left[z-\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}\right]\cdot\left[z-\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}\right],$$

其中 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 是 $R(z)$ 在上半平面一级极点. 所以

$$I=\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[R(z),\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]+\mathrm{Res}\left[R(z),\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})\right]\right\}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}\mathrm{i}},\frac{1-\mathrm{i}}{4\sqrt{2}\mathrm{i}}\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例 8 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$；

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a>0,b>0$.

解 (1) $R(x)$ 是偶函数，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)^2},$$

在上半平面有二级极点 $z=\mathrm{i}$. 一级极点 $z=2\mathrm{i}$，分母幂次数高于分子两次以上，实轴上无奇点，所以

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[R(z),2\mathrm{i}]\}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left\{\lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})\frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)^2}\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2\frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)^2}\right]\right\}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{36\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}}{36}\right]=\frac{\pi}{18}.$$

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},$$

被积函数在上半面有一级极点 $z=\mathrm{i}a$ 和 $\mathrm{i}b$. 故

$$I=\frac{2}{2}\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}a]+\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}b]$$

$$=\pi\mathrm{i}\left\{\lim_{z\to\mathrm{i}a}(z-\mathrm{i}a)\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to\mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right\}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}a(b^2-a^2)}+\frac{1}{2\mathrm{i}b(a^2-b^2)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2ab(a+b)}.$$

例 9 证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z^n \bar{z}^k} = \frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(2h)^{n+k-1}(k-1)!(n-1)!},$$

式中，k 与 n 为自然数，C 是平行于实轴且与虚轴交于 ih $(h>0)$ 的直线.

证 $$\int_C \frac{dx}{z^n \bar{z}^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+ih)^n (x-ih)^k}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+h^2)^k (x+ih)^{n-k}}.$$

$R(z)$ 在上半平面只有一个 k 级极点 $z = ih$，所以

$$\frac{1}{2\pi\lambda}\int_C \frac{dx}{z^n \bar{z}^k} = \mathrm{Res}[R(z), ih]$$

$$= \lim_{z\to ih} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{1}{(z+ih)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to ih} \frac{(-1)^{k-1} n(n+1)\cdots(n+k+1)}{(z+ih)^{n+k-1}}$$

$$= \frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(k-1)!(2h)^{n+k-1}(n-1)!}.$$

例 10 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2T}} dx$ （p,q,T 为非负整数，且 $p<T, q<T$）.

解 由题设知分母幂次数高于分子两次，实轴上无奇点，在上半平面有 $T-1$ 个一级极点，$z_k = e^{k\pi i/T}, k = 1,2,\cdots,T-1$（因为分子与分母有公因子 z^2-1，所以 $z=\pm 1$，即实轴上的点不是极点）. 所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2T}} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2T}} dx$$

$$= \frac{2}{2}\pi i \sum_{k=1}^{T-1} \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

$$= \pi i \sum_{k=1}^{T-1} \left.\frac{z^{2p}-z^{2q}}{-2Tz^{2T-1}}\right|_{z=z_k}$$

$$= \pi i \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{2T}\left[e^{(2q+1)k\pi i/T} - e^{(2p+1)k\pi i/T}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2T}\left(\cot\frac{2p+1}{2T}\pi - \cot\frac{2q+1}{2T}\pi\right).$$

当 $T = 2n, q = p + n\ (p < n)$ 时，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{4n}\left(\cot\frac{2p+1}{4n}\pi - \cot\frac{2p+2n+1}{4n}\pi\right)$$

$$= \pi\Big/\left(2n\sin\frac{2p+1}{2n}\pi\right).$$

例 11 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ (n 是正整数).

解 $R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ 在上半平面有一个 $n+1$ 级极点 $z = i$. 分母幂次数高于分子两次以上，在实轴上无奇点. 所以

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res}[R(z), i]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z-i)^{n+1}\frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(z+i)^{2n+1}}$$

$$= 2\pi i \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!2^{2n+1}\cdot i} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

特别地，当 $n = 0$ 时，$I = \pi$.

例 12 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$.

解 $R(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ 在上半平面有两个一级极点 $z = i, z = 3i$，分母幂次数比分子高两次，在实轴上无奇点. 所以

$$I = 2\pi i\{\text{Res}[R(z), i] + \text{Res}[R(z), 3i]\}$$

$$= 2\pi i\left\{\lim_{z\to i}\frac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)} + \lim_{z\to 3i}\frac{z^2-z+2}{(z+3i)(z^2+1)}\right\}$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1+i}{16} + \frac{3-7i}{48}\right) = \frac{5}{12}\pi.$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$ 型积分($a > 0$).

被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数，分母幂次数比分子高一次以上，实轴上无孤立奇点.

例 13 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $R(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+5}$，分母幂次数比分子高两次，实轴上无奇点，上半平面有一个一级极点 $z=-2+\mathrm{i}$，所以

$$
\begin{aligned}
I&=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+4z+5}\mathrm{d}z\right]\\
&=\mathrm{Re}\{2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[R(z),-2+\mathrm{i}]\\
&=\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}-2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+2+\mathrm{i}}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{1-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\right]=\mathrm{Re}(\pi\mathrm{e}^{1-2\mathrm{i}})=\pi\mathrm{e}^{-1}\cos 2.
\end{aligned}
$$

(2) $R(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，分母幂次数比分子高一次，实轴上无奇点，上半平面有一个一级极点 $z=\mathrm{i}$. 所以

$$
\begin{aligned}
I&=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right]=\mathrm{Im}\{2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]\}\\
&=\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\right]=\mathrm{Im}[\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}]=\pi\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}
$$

例 14 **试用图 5.2 中的积分路线求** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

由柯西－古萨定理，有

$$\int_{-R}^{-r}+\int_{C_r}+\int_r^R+\mathrm{i}\int_0^{\pi}+\int_R^{-R}+\mathrm{i}\int_{\pi}^0=0.$$

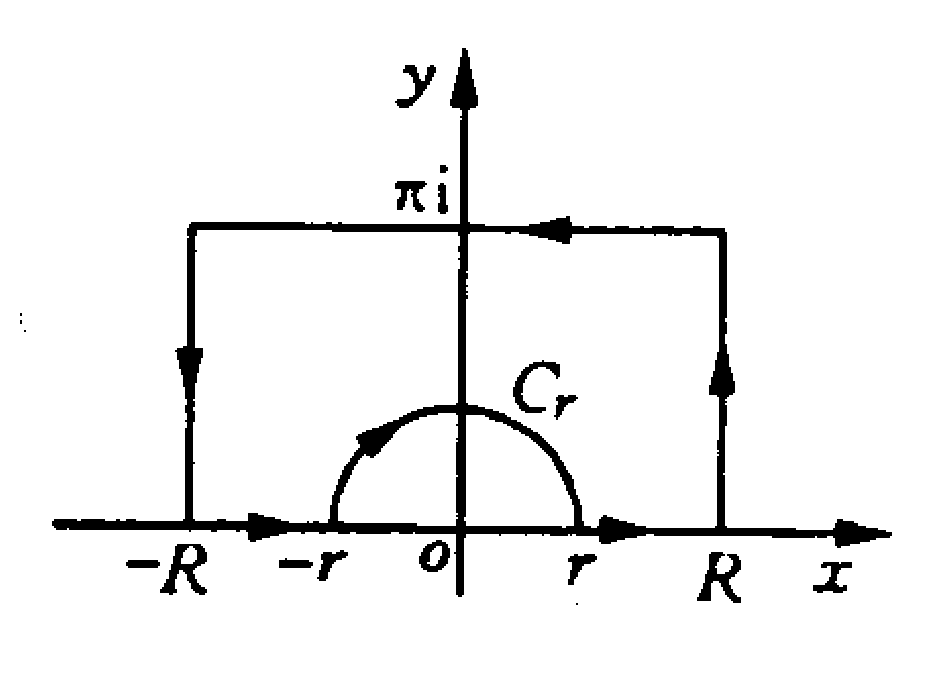


图 5.2

令 $x=-t$，有

$$\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\int_R^r\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t=-\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx,$$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy}dy=e^{iR}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-y}}{R+iy}dy\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

$$\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy}dy=e^{-iR}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-y}}{-R+iy}dy\xrightarrow{R\to\infty}0.$$

又
$$\int_{R}^{-R}\frac{e^{i(x-\pi)}}{x-\pi}dx=\int_{R}^{-R}\frac{e^{ix}e^{-i\pi}}{x-\pi}dx\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

而
$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i.$$

所以
$$2i\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi i\quad（即 r\to 0,R\to\infty），$$

即
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

例 15 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$，其中 $a>0$，b 为任意复数.

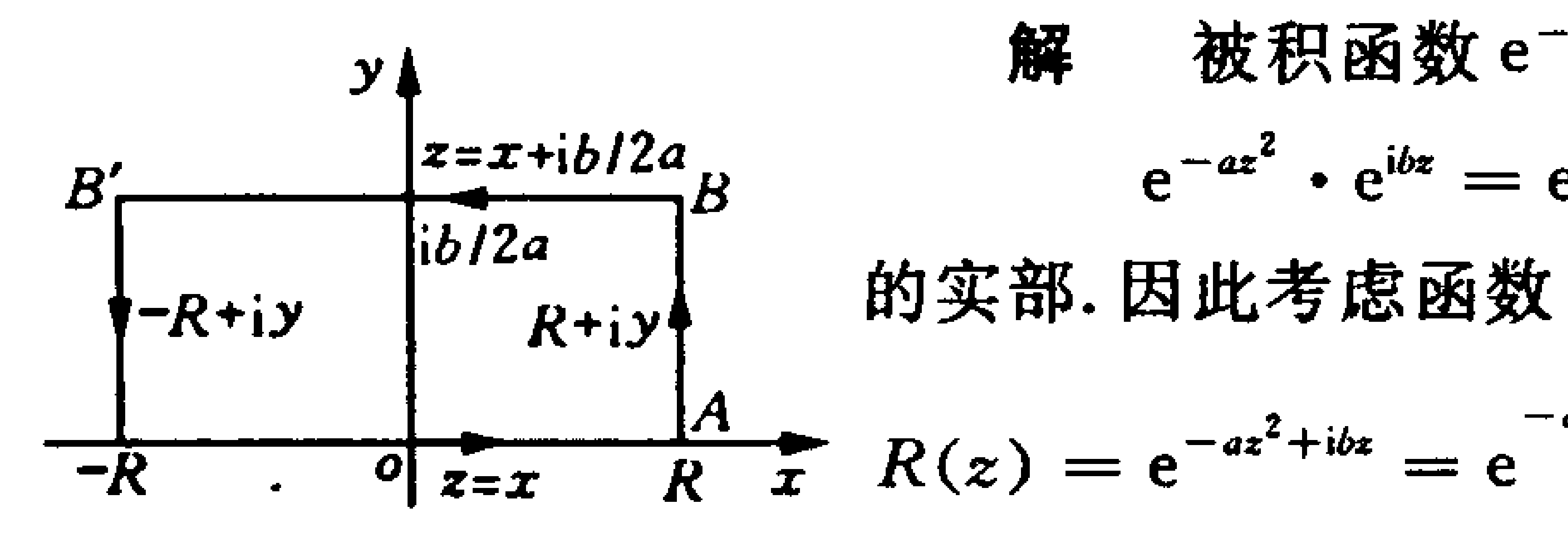


图 5.3

解 被积函数 $e^{-ax^2}\cos bx$ 是

$$e^{-az^2}\cdot e^{ibz}=e^{-az^2+ibz}$$

的实部. 因此考虑函数

$$R(z)=e^{-az^2+ibz}=e^{-a\left(z-\frac{b}{2ai}\right)^2}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

取积分线路如图 5.3 所示.

因为 $R(z)$ 在闭路及其内部解析，故：

$$I_1+I_2+I_3+I_4=0.$$

$$I_1=\int_{-R}^{R}e^{-az^2+ibz}dz,$$

$$I_2=\int_{0}^{b/2a}e^{-a(R+iy)^2+ib(R+iy)}i\,dy=ie^{-aR^2}\int_{0}^{b/(2a)}e^{ay^2-by}\cdot e^{R(b-2ay)i}dy,$$

$$I_3=\int_{R}^{-R}e^{-ax^2}e^{-b^2/(4a)}dx,$$

$$I_4=\int_{b/2a}^{0}e^{-a(-R+iy)+ib(-R+iy)}i\,dy=-ie^{-aR^2}\int_{0}^{b/(2a)}e^{ay^2-by}\cdot e^{-R(b-2ay)i}dy.$$

当 $R\to\infty$ 时,有

$$I_3\to -\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{b^2/(4a)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$|I_2|\leqslant \mathrm{e}^{-aR^2}\int_0^{b/(2a)}\mathrm{e}^{ay^2-by}\mathrm{d}y\xrightarrow{R\to\infty}0,\ I_2\to 0.$$

同理有 $I_4\to 0$.

于是,当 $R\to\infty$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2+\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

由实部等于实部,虚部等于虚部,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x=0.$$

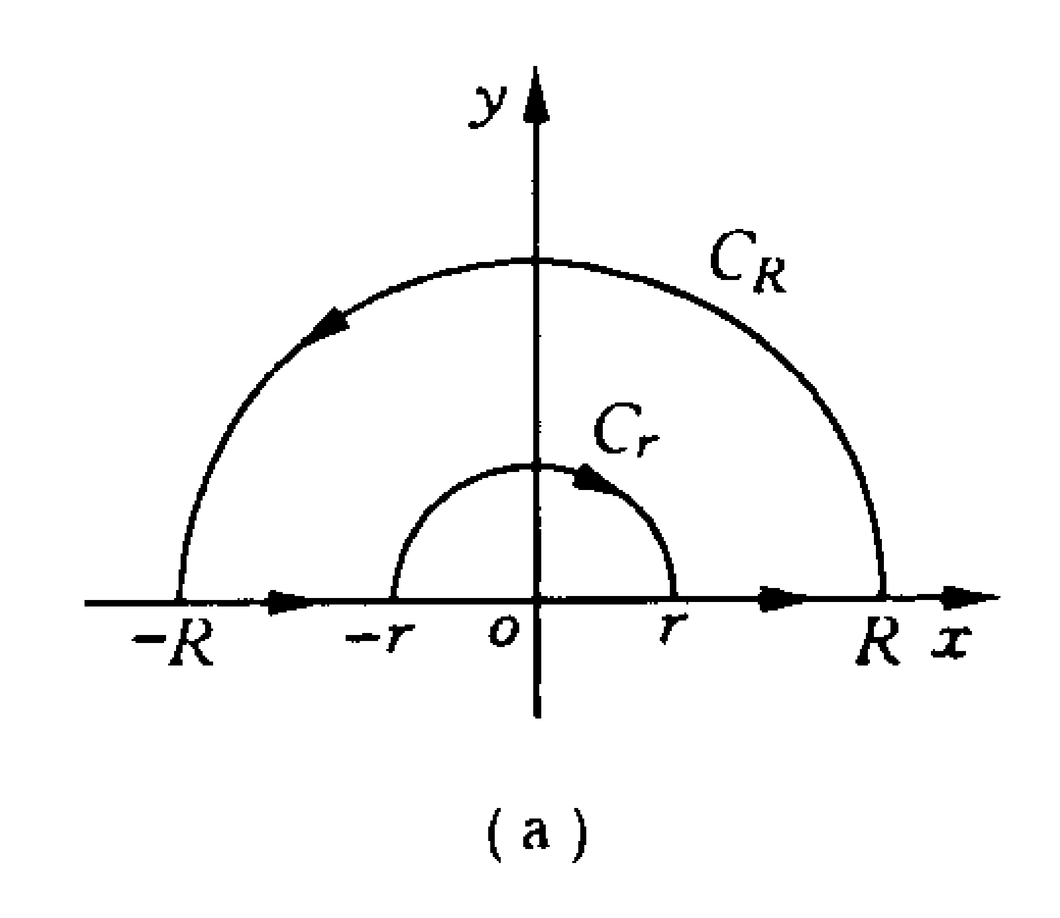
例 16 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 此例与例13类似,例13是用柯西-古萨定理解,此例用留数定理来解. 函数 $R(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$,分母幂次数高于分子一次以上,但实轴上有孤立奇点 $z=0$. 作以原点为圆心、r 为半径的上半圆周 C_r(见图 5.4(a)),使 $C_R,[-R,-r],C_r,[r,R]$ 构成封闭曲线,此时闭曲线内只有一个奇点 i. 于是

$$\begin{aligned}I&=\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]\}-\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

而
$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{(1+z^2)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\pi\mathrm{i},$$

故
$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})}+\pi\mathrm{i}\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\right)+\pi\mathrm{i}\right]=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}).\end{aligned}$$



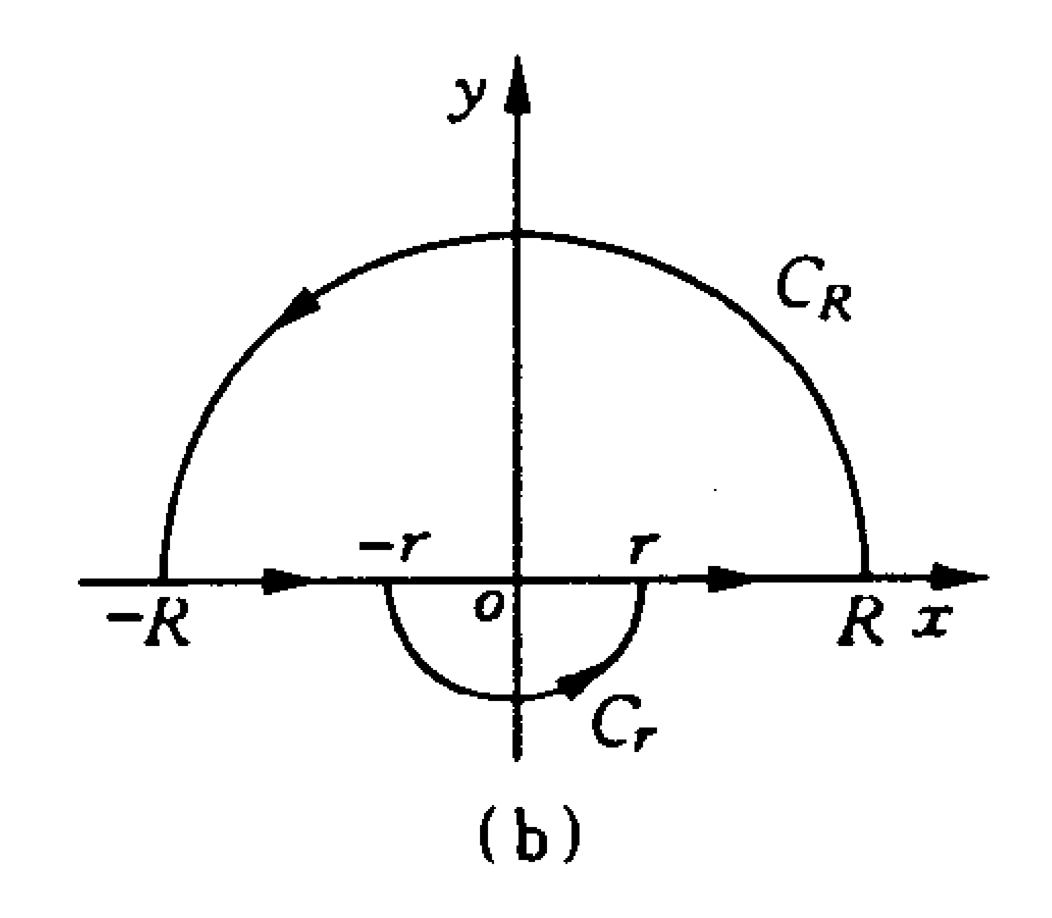


图 5.4

若取以原点为圆心、r 为半径的下半圆周为 C_r(见图 5.4(b)),则 $z=0$ 在 C 内. 于是

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]+2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z),0] \\ &\quad -\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z\} \\ &= \mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})}+\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{(z^2+1)}-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\right\} \\ &= \mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+1\right)-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\right\}=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}). \end{aligned}$$

例 17 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}\mathrm{d}x$, $m>0, a>0$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $0<a<1$.

解 (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^4+a^4}\mathrm{d}x.$

$R(z)=\dfrac{z}{z^4+a^4}$ 在上半平面有一级极点 $a\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}$ 和 $a\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}$,分母幂次数比分子高三次,实轴上无奇点. 由定理知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^4+a^4}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{e}^{\prime}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}]+\mathrm{Res}[R(z),a\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}]$$

$$= 2\pi i \frac{\pi e^{-\sqrt{2}ma/2}\sin(\sqrt{2}ma/2)}{2a^2}$$

$$= \frac{\pi i}{a^2} e^{-\sqrt{2}ma/2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}ma.$$

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{imx}}{x^4+a^4}dx = \frac{\pi}{2a^2}e^{-\sqrt{2}ma/2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}ma.$$

(2) 因为 $0 \leqslant \frac{e^{ax}}{1+e^x} \leqslant e^{ax}e^{-x} \leqslant e^{(a-1)x}$，且 $0 < a < 1$，$\int_0^{+\infty} e^{(a-1)x}dx$ 收敛于 $\frac{1}{1-a}$，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 收敛. 对 $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$，因为 $\frac{e^{ax}}{1+e^x} < e^{ax}$，$\int_0^{+\infty} e^{ax}dx = \frac{1}{a}$，所以 $\int_{-\infty}^0\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 也收敛，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 收敛. 且

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$

取积分路线 Γ 如图 5.5 所示，则在 Γ 内只一个一级极点 $z = \pi i$，故

图 5.5

$$\int_\Gamma R(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}[R(z),\pi i]$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{az}}{(1+e^z)'}\right|_{z=\pi i}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

即 $$\int_{AB}R(z)dz + \int_{BE}R(z)dz + \int_{EF}R(z)dz + \int_{FA}R(z)dz = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

因为

$$\int_{EF}R(z)dz = \int_R^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -e^{2\pi a i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,$$

$$\left|\int_{BE}R(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}dy\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{|e^{a(R+iy)}|}{|1+e^{R+iy}|}dy$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{ax}}{e^R - 1} dy = 2\frac{2\pi e^{aR}}{e^R} \xrightarrow[0<a<1]{R\to\infty} 0,$$

$$\left| \int_{FA} R(z) dz \right| = \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{1 + e^{-R+iy}} dy \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{|e^{a(-R+iy)}|}{|1 + e^{-R+iy}|} dy$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} dy = \frac{2\pi e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \xrightarrow[a>1]{R\to\infty} 0,$$

则当 $R \to \infty$ 时，有

$$1 - e^{2\pi a i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

所以 $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2\pi a i} - 1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

例 18 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$.

解 $$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} dx.$$

取积分线路如图 5.6 所示，则 C 内无奇点，故

$$\oint_C \frac{\sin^3 z}{z^3} dz = 0,$$

$$\int_{C_R} \frac{\sin^3 z}{z^3} dz \xlongequal[r\to 0]{R\to\infty} 0,$$

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} dx$$

$$= \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{i3z} - e^{iz}}{z^3} dz$$

图 5.6

$$= \lim_{r\to 0} \oint_{C_r} \frac{(1 + 3iz + (3iz)^2/2! + \cdots) - 3(1 + iz + (iz)^2/2 + \cdots)}{z^3} dz$$

$$= \lim_{r\to 0} \oint_{C_r} \left(-\frac{2}{z^3} - \frac{3}{z} + \cdots \right) dz = -3\pi i.$$

于是 $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i}(-3\pi i) = \frac{3}{8}\pi.$$

例 19 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$ ($n \geqslant 2$ 整数).

证 $R(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$，有 n 个一级极点 $e^{i\pi/n}$，$\cdots$，$e^{i(2n-1)\pi/n}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$z=e^{i\pi/n}$ 总在上半平面. 取积分线路 C 如图 5.7 所示，则在 C 内仅一个奇点 $e^{i\pi/n}$，故

图 5.7

$$\int_0^R R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}R(z)\mathrm{d}z+\int_L R(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot \mathrm{Res}[R(z),e^{i\pi/n}]=2\pi i\lim_{z=e^{i\pi/n}}\frac{1}{(1+z^n)'}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to e^{i\pi/n}}\frac{1}{nz^{n-1}}=2\pi i\lim_{z\to e^{i\pi/n}}\frac{z}{n}\frac{1}{z^n}$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{n}e^{i\pi/n}\right)=-\frac{2}{n}\pi i e^{i\pi/n}.$$

当 $R\to\infty$ 时，$\int_{C_R}R(z)\mathrm{d}z=0$. 在 L 上，令 $z=re^{i2\pi/n}$，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_L\frac{\mathrm{d}z}{1+z^n}=\lim_{R\to\infty}\int_R^0\frac{e^{i2\pi/n}}{1+r^n}\mathrm{d}r=\lim_{R\to\infty}\left(-\int_0^R\frac{e^{i2\pi/n}}{1+r^n}\mathrm{d}r\right)$$

$$=-\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{e^{i2\pi/n}}{1+x^n}\mathrm{d}x,$$

而

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R R(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x,$$

所以 $$I=\int_0^\infty\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x=-\frac{2\pi i e^{i\pi/n}}{(1-e^{i2\pi/n})n}=\frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

例 20 已知 $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，证明菲涅耳积分

$$\int_0^\infty \sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^\infty\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证 当 $z=x$ 时，有

$$\int_0^\infty e^{iz^2}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\cos x^2\mathrm{d}x+i\int_0^\infty\sin x^2\mathrm{d}x.$$

取闭曲线 C 如图 5.8 所示，则 C 内无奇点，故

$$\oint_C e^{iz^2}\mathrm{d}z=0,$$

即 $$\int_{OA} e^{iz^2}dz+\int_{\widehat{AB}} e^{iz^2}dz+\int_{BO} e^{iz^2}dz=0.$$

在 oA 上，$z=x\quad(0\leqslant x\leqslant R)$；

在$\widehat{AB}$ 上，$z=\mathrm{R}e^{i\theta}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$；

在 Bo 上，$z=re^{i\pi/4}\quad(0\leqslant r\leqslant R)$.

所以 $$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cdot e^{i2\theta}}Rie^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{ir^2e^{\pi i/2}}e^{\pi i/4}dr=0$$

或 $$\int_0^R(\cos x^2+i\sin x^2)dx$$
$$=e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-r^2}dr-\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cos2\theta-R^2\sin2\theta}iRe^{i\theta}d\theta.$$

令 $R\to\infty$，有

$$e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-r^2}dr=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\pi i/4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

图 5.8

而 $$\left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cos2\theta-R^2\sin2\theta}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$
$$\leqslant\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin\theta}Rd\theta\leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-4R^2\theta/\pi}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}),$$

从而 $$\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cos2\theta-R^2\sin2\theta}iRe^{i\theta}d\theta\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

于是 $$\int_0^{+\infty}(\cos x^2+i\sin x^2)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

比较实部与虚部，即得

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

用类似方法，可以利用$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$证明，当$0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{4}$时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2\cos2\alpha}\cos(x^2\sin2\alpha)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\alpha.$

考察 $R(z)=e^{-z^2}$ 沿与图 5.8 类似线路$\left(\dfrac{\pi}{4}\text{ 改为 }\alpha\right)$积分．当 R

$\to\infty$ 时,有 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}-e^{i\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-r^2(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)}dr=0$.

例 21 证明:若 $F(z)=e^{imz}f(z)$, $m>0$,且满足

(1) 在上半平面仅有有限个奇点 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$,

(2) 除一级极点 x_k $(k=1,2,\cdots,m)$ 外,在实轴上解析,

(3) 当 $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$, $z\to\infty$ 时,有 $f(z)\to 0$,

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)dx=2\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),x_k]\right\}.$$

这里,积分(对所有 x_k 及 ∞) 取主值,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left\{\lim_{r\to0}\left[\int_{-R}^{x_1-r}F(x)dx+\int_{x_1-r}^{x_2-r}F(x)dx+\cdots+\int_{x_m-r}^{R}F(x)dx\right]\right\}$$

证 考察积分 $\int_\Gamma F(z)dz=\int_\Gamma e^{imz}f(z)dz$,取积分线路 Γ 如图 5.9 所示,闭路 Γ 是由 $|z|=R$ 的上半圆周 C_R 与 $|z-x_k|=r$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的上半圆周 C_{r_k},及实轴上线段$[-R,R]$除去这些小圆周的直径(x_k-r,x_k+r)后的余线段 F 所组成. 取 R 足够大,而 r 足够小,Γ 包含 a_k, $|z-x_j|$ 互不相交.

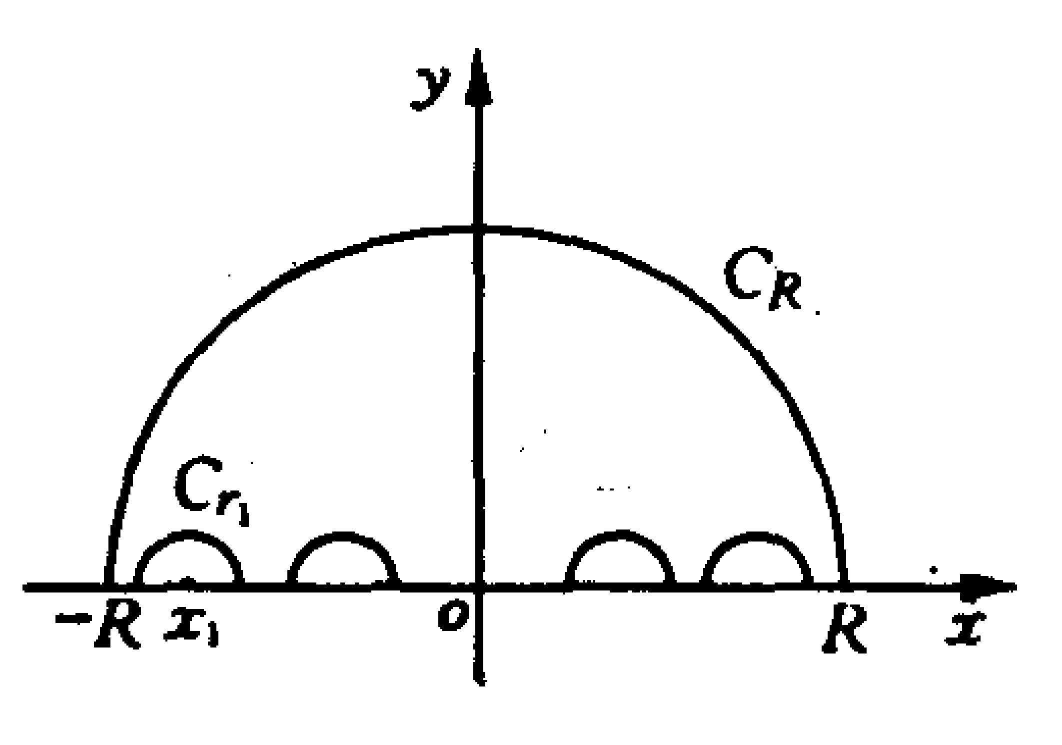


图 5.9

设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$,于是

$$\int_\Gamma F(z)dz=\int_{-R}^{x_1-r}F(x)dx+\cdots+\int_{x_m-r}^{R}R(x)dx$$
$$+\int_{C_R}F(z)dz+\sum_{k=1}^{m}\int_{C_{r_k}}F(z)dz, \qquad (1)$$

已知 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)dz=0$ (见教材),证明

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r_k}} F(z)\mathrm{d}z = R_k\int_{C_{r_k}} \frac{\mathrm{d}z}{z-x_k}.$$

因为 x_k 是一级极点，所以 $\lim\limits_{z\to x_k}(z-x_k)F(z)=R_k$，即

$$|(z-x_k)F(z)-R_k|<\varepsilon \quad (|z-x_k|=r<\delta).$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_{C_{r_k}} F(z)\mathrm{d}z - R_k\int_{C_{r_k}}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_k}\right|\\ =&\left|\int_{C_{r_k}}[(z-x_k)F(z)-R_k]\frac{\mathrm{d}z}{z-x_k}\right|\\ <&\varepsilon\int_{C_{r_k}}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-x_k|}=\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

又

$$\int_{C_{r_k}}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_k}=\int_{\pi}^{0}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta=-\pi\mathrm{i}\quad (z-x_k=re^{\mathrm{i}\theta}),$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_{r_k}}F(z)\mathrm{d}z=R_k\int_{C_{r_k}}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_k}=-R_k\pi\mathrm{i}.$$

但是

$$\int_{\Gamma}F(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k],$$

令 $R\to\infty, r\to 0$，则由式(1)，得

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k]=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{m}(-R_k)\pi\mathrm{i}.$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),x_k]\right\}.$$

例 15、例 17、例 19 就是这类例子.

第四节　对数留数与辐角原理

主 要 内 容

1. 具有以下形式的积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 称为 $f(z)$ 关于曲线 C

的对数留数.

因为$[\ln f(z)]' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$,所以说,对数留数就是函数 $f(z)$ 的对数 $\ln f(z)$ 的导数在它的位于 C 内的孤立奇点处的留数的代数和.

定理 1 如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零,在 C 的内部除去有限个极点外也处处解析,则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

其中,N 为 $f(z)$ 在 C 内零点的总个数,P 为 $f(z)$ 在 C 内极点的总个数,且 C 取正向. 在计算零点与极点的个数时,m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点.

2. 对数留数$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ 的几何意义

考虑变换 $w = f(z)$,当 z 沿 C 正向绕行一周时,对应的 w 在 w 平面内描出曲线 Γ,是一条连续的封闭曲线,不一定是简单的. 可能正向(或负向)绕原点若干次,对数留数$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ 在数值上等于 Γ 绕原点的回转次数,总是一个整数.

定理 2(辐角原理) 如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析,且在 C 上不等于零,则 $f(z)$ 在 C 内零点的个数等于$\dfrac{1}{2\pi}$乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周 $f(z)$ 辐角的改变量,即

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\operatorname{Arg} f(z).$$

3. 路西(Rouche)定理

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上和 C 内解析,且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$,则在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 的零点的个数相同.

疑 难 解 析

路西定理有哪些应用？

答　路西定理在代数方面、微分方程方面和函数论等方面都有较广泛的应用.

如在代数方面，可以用路西定理证明：n 次多项式 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n+1}z + a_n(a_0 \neq 0)$ 必有 n 个根.

在微分方程方面，常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

的零解（平凡解）渐近稳定的充要条件是：特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} = 0$$

的根（特征根）的实部都是负数. 由于特征方程的左边是一个 n 次多项式，因此用路西定理可以证明：若 n 次多项式 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$ 在虚轴上没有零点，则 $P(z)$ 的全部零点具有负虚部（即全部零点在左半平面 $\mathrm{Re}(z) < 0$ 内）的充要条件是

$$\lim_{R\to+\infty} \Delta_{C_R}\arg P_n(z) = -n\pi.$$

在函数论方面：

(1) 区域 D 内单叶解析的函数 $f(z)$ 的导数必不为零. 即在 D 的任一点，有 $f'(z) \neq 0$.

(2) 霍尔维茨(Hurwitz)定理　设 z 是一个区域，且 D 内的解析函数序列 $f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $f(z) \neq 0$，并设 C 是 D 内的任意一条闭曲线，其内部也属于 D，且 C 不经过函数 $f(z)$ 的零点，则存在一个依赖于曲线 C 的数 N，使得当 $n > N$ 时，函数 $f_n(z)$ 在 C 内的零点的个数等于函数 $f(z)$ 在 C 内的零点的个数.

方法、技巧与典型例题分析

本节问题分为两类：一是对数留数与对数留数定理的应用，二是辐角原理与路西定理的应用.

一、对数留数与对数留数定理的应用

对数留数为我们计算复变函数积分开辟了新的途径，即对 $\oint_C g(z)\mathrm{d}z$，若能化 $g(z)$ 为 $\dfrac{af'(z)}{f(z)}$（a 为常数），且 $f(z)$ 在 C 内的零点与极点个数易于确定，就有

$$\oint_C g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot a\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2a\pi\mathrm{i}(N-P),$$

其中 N 为 C 内零点个数，P 为 C 内极点个数.

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的留数有以下计算规则：

(1) 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域内解析，z_0 为 $f(z)$ 的 n 级零点，则 z_0 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，且有

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=n.$$

(2) 若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $z=z_0$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，且有

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=m.$$

例 1 求函数 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z|=\pi$ 的对数留数.

解 令 $1+z^2=0$，得 $f(z)$ 有两个一级零点 $\pm\mathrm{i}$. 再令 $g(z)=1-\cos 2\pi z=0$，得 $g(z)$ 的无穷多个零点 $z_n=n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 由于 $g'(z)=2\pi\sin 2\pi z, g''(z)=4\pi^2\cos 2\pi z$，可知 $g'(z_n)$

$=0, g''(z_n)=4\pi^2\neq 0$. 所以 z_n 是 $g(z)$ 的二级零点，$f(z)$ 的二级极点.

但在圆周 $|z|=\pi$ 内，有两个一级零点 $\pm i$，七个二级极点 0，± 1，± 2，± 3. 所以，由对数留数定理，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2-7\times 2=-12.$$

例 2 利用公式 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$，计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz$； (2) $\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz$；

(3) $\oint_{|z|=3}\tan z dz$； (4) $\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz$.

解 (1) $f(z)=z, f'(z)=1, N=1, P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz=2\pi i(1-0)=2\pi i.$$

(2) $f(z)=z^2-1, f'(z)=2z, N=2, P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{2}(2-0)=2\pi i.$$

(3) $f(z)=\cos z, f'(z)=-\sin z, N=2\left(z=\pm\frac{\pi}{2}\right), P=0$.
所以

$$\oint_{|z|=3}\tan z dz=2\pi i[-(2-0)]=-4\pi i.$$

(4) $\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$. $f_1(z)=z, N_1=1, P_1=0$；$f_2(z)=z+1, N_2=1, P_2=0$. 所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z-1)}dz=\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz-\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-1}dz$$
$$=2\pi i(1-0)-2\pi i(1-0)=0.$$

例 3 利用 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$ 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{5z^4+6z^2+1}{z(z^2+1)^2}dz$； (2) $\oint_{|z|=4}\frac{6z^2-14}{z^3-7z+6}dz$.

解 (1) $f(z)=z(z^2+1)^2$, $f'(z)=5z^4+6z^2+1$, $N=5$ ($z=0$,二级零点 $z=\pm \mathrm{i}$), $P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=4}\frac{5z^4+6z^2+1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(5-0)=10\pi\mathrm{i}.$$

(2) $f(z)=z^3-7z+6$, $f'(z)=3z^2-7$. $N=3$ (在 C 内有三个一级零点 $1,2,-3$), $P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=4}\frac{6z^2-14}{z^3-7z+6}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}[2(3-0)]=12\pi\mathrm{i}.$$

二、辐角原理与路西定理的应用

应用路西定理的关键是构造 $F(z)=f(z)+g(z)$,使 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 C 上和 C 内解析,且在 C 上满足 $|f(z)|>|g(z)|$. 这时方可应用定理结论来确定一个函数在某区域 D 内零点的个数或某个方程在 D 内根的个数.

例 4 证明:n 次多项式

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\ a_0\neq 0$$

有 n 个根.

证 (1) 用对数留数证. 令 $P_n(z)=f(z)$,对 $f(z)$ 来说,当 $|z|=R$,且 R 充分大时,有 $|f(z)|>1$. 所以,$f(z)$ 的零点只能位于 $|z|<R$ 之内. 设其个数为 N,则

$$N=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z.$$

又,由无穷远点留数的定义,有

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\infty\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R^-}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=-N.$$

但当 $|z|>R$ 时,$\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{n}{z}+\varphi(z)$,其中 $\varphi(z)$ 的最高次幂为 z^{-2},

即 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},\infty\right]=n$.

由 $-N=-n\Rightarrow N=n$. 命题得证.

(2) 用辐角原理证. 对 $P_n(z)$ 来说,当 $|z|=R$ 充分大时,有

$$\Delta_{C^+}\arg P_n(z) = \Delta_{C^+}\arg a_0 z^n + \Delta_{C^+}\arg\left[1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z_n}\right]$$
$$= 2\pi n + 0 = 2\pi n,$$

故由辐角原理知：在 $|z| = R$ 内，$P_n(z)$ 有 n 个根.

(3) 用路西定理证. 令 $f(z) = a_0 z^n, g(z) = a_1 z^{n+1} + \cdots + a_n$，有

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{f(z)} = 0 \Longrightarrow \text{当 } R \text{ 充分大时，} |f(z)| > |g(z)| > 0.$$

而 $f(z) = a_0 z^n = 0$ 在 $|z| < R$ 内有 n 个零点. 故由路西定理，$P_n(z) = f(z) + g(z)$ 在 $|z| < R$ 内有 n 个根.

当 $|z| > R$ 时，$|f(z)| > |g(z)|$. 所以，在 $|z| = R$ 上和圆外有

$$|P_n(z)| = |f(z) + g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

即知在圆 $|z| = R$ 上和圆外没有零点.

所以，$P_n(z)$ 有且仅有 n 个根.

例 5 设 $f(z)$ 在 D 内除有限个点 $a_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 外解析，a_i 为 n_i 级零点；C 是 D 内一个封闭曲线，a_i 全在 C 内. C 内还有有限个极点 $b_j(1 \leqslant j \leqslant k)$，$b_j$ 为 m_j 级极点. 若 $\varphi(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)dz = \sum_{i=1}^{l} n_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{k} b_j\varphi(b_j).$$

证 已知

$$f(z) = C_{n_1}^{(i)}(z - a_i)^{n_i} + C_{n_1+1}^{(i)}(z - a_i)^{n_i+1} + \cdots,\ C_{n_i}^{(i)} \neq 0.$$
$$\varphi(z) = \varphi(a_i) - \varphi'(a_i)(z - a_i) + \cdots,$$
$$f'(z) = n_i C_{n_i}^{(i)}(z - a_i)^{n_i-1} + \cdots,$$

故 $$\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)$$
$$= \frac{n_i C_{n_i}^{(i)}(z - a_i)^{n_i-1} + \cdots}{C_{n_i}^{(i)}(z - a_i)^{n_i} + \cdots}[\varphi(a_i) + \varphi'(a_i)(z - a_i) + \cdots]$$
$$= \frac{n_i}{z - a_i}[\varphi(a_i) + \cdots].$$

因此，$\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=a_i$ 的留数为 $n_i\varphi(a_i)$ $(1\leqslant i\leqslant l)$.

类似可证，$\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=b_j$ 的留数为 $-m_j\varphi(b_j)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$. 于是，由留数定理知

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)dz=\sum_{i=1}^{l}n_i\varphi(a_i)-\sum_{j=1}^{k}b_j\varphi(b_j).$$

例 6 设 C 为区域 D 的一条正向简单闭曲线，z_0 为 C 内一点，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，$f'(z_0)\neq 0$. 在 C 内 $f(z)$ 无其它零点. 证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=z_0.$$

证 因为 z_0 是 $f(z)$ 的一级零点，在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，$f(z)=(z-z_0)g(z)$，$g(z)$ 在此邻域内解析. 故

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-z_0}+\frac{g'(z)}{g(z)},\quad \operatorname{Res}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=z_0.$$

又 $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 C 内只有奇点 z_0，依留数定理，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=\operatorname{Res}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=z_0.$$

实际上，本例可直接利用上例结论，令 $\varphi(z)=z$，只有一个一级零点，即可求得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=z_0.$$

例 7 设 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，证明：在 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$.

证 不妨取 $f(z)=-z$，则 $f(z)$ 在 C 上和 C 内解析，且在 C 上满足

$$1=|f(z)|=|-z|>\varphi(z).$$

由路西定理，$f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在 C 内有相同个数的零点. 而 $f(z)$ 在 C 内只有一个零点. 故 $f(z)+\varphi(z)$ 在 C 内也只有一个

零点 z_0，使 $f(z_0)+\varphi(z_0)=0$，即 $-z_0+\varphi(z_0)=0$，从而证得

$$\varphi(z_0)=z_0.$$

例 8 设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且除 $f(z_0)=0$ 外，在其它点处不恒为零. 证明：必存在一个 z_0 的邻域. 在这个邻域内除 z_0 外不再有 $f(z)$ 的零点(解析函数零点的孤立点).

证 设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点，由 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，所以 $\varphi(z)$ 在 z_0 处连续. 从而 $|\varphi(z)|$ 也在 z_0 处连续，且 $|\varphi(z_0)|>0$. 由实连续函数的保号性知，存在圆域 $|z-z_0|<r<R$，在域内 $\varphi(z)\neq 0$，所以 $f(z)$ 除 z_0 外无其它的零点.

例 9 证明：对任给的正数 r，恒存在自然数 N，当 $n>N$ 时

$$F_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}$$

的零点全位于 $|z|\leqslant r$ 上.

证 令 $z=\dfrac{1}{\zeta}$，得

$$F_n(z)=1+\zeta+\frac{\zeta^2}{2!}+\cdots+\frac{\zeta^n}{n!}=f_n(\zeta).$$

故只需证明：对给定的$r>0$，恒存在N，当$n<N$时，$f_n(\zeta)$在 $|\zeta|<\dfrac{1}{r}$ 内无零点.

记 $m=\min\limits_{|\zeta|=1/r}|e^\zeta|$，$m>0$，由于 $f_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|=\dfrac{1}{r}$ 上一致收敛于 e^ζ，所以必存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$|f_n(\zeta)-e^\zeta|<m\leqslant|e^\zeta|\quad\left(\text{在 }|\zeta|=\frac{1}{r}\text{ 上}\right).$$

由路西定理，e^ζ 与$[f_n(\zeta)-e^\zeta]+e^\zeta=f_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|=\dfrac{1}{r}$ 内零点个数相等. 但 e^ζ 恒大于0，所以 $f_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|=\dfrac{1}{r}$ 内无零点. 即 $F_n(z)$ 的零点全位于 $|z|\leqslant r$ 上.

例 10 求方程 $z^4-5z+1=0$ 在以下区域内的零点个数：

(1) $|z|<1$；　　(2) $1<|z|<2$.

解　(1) 在 $|z|=1$ 上，有 $|-5z|=5>|z^4+1|\geqslant 0$. 由路西定理，$f(z)=-5z$ 与 z^4-5z+1 在 $|z|<1$ 内零点个数相同，只有一个.

(2) 在 $|z|=2$ 上，有 $|z^4|=16>|-5z+1|$，且在 $|z|<2$ 内 $f_1(z)=z^4$ 有四个零点. 由路西定理，函数 z^4-5z+1 也有四个零点. 而在 $|z|=1$ 上，z^4-5z+1 没有零点，因此，在 $1<|z|<2$ 内，函数只有三个零点.

例 11　**证明方程 $z=\lambda-e^{-z}(\lambda>1)$ 在右半平面上有惟一的实根.**

证　设 $z=x+iy$ 满足 $z=\lambda-e^{z}$，即

$$x+iy=\lambda-e^{-x}\cos y+ie^{-x}\sin y,$$

得

$$\begin{cases}x=\lambda-e^{-x}\cos y,\\ y=e^{-x}\sin y,\end{cases}\xrightarrow{|y|\geqslant|\sin y|}y=0.$$

所以，原方程只有实根.

考虑函数 $x+e^{-x}$. 当 $x\to 0$ 时，$x+e^{-x}\to 1$；当 $x\to+\infty$ 时，$x+e^{-x}\to+\infty$，且 $(x+e^{-x})^1=1-e^{-x}>0$. 所以 $x+e^{-x}$ 单调增加，有且仅有一个 x 满足 $x+e^{-x}=\lambda$. 于是，知方程 $z=\lambda-e^{-z}$ 在右半平面上只有惟一实根. 此题也可令 $f(z)=\lambda-z$，$g(z)=-e^{-z}$ 来证.

例 12　**求下列方程在圆 $|z|<\dfrac{3}{2}$ 内根的个数：**

(1) $z^2-3z+2=0$；　　(2) $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

解　(1) 可用多种方法来解此题.

1) 用辐角原理　$f(z)=z^2-3z+2$，$f'(z)=2z-3$，所以

$$\begin{aligned}N&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3/2}\frac{2z-3}{z^2-3z+2}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3/2}\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3/2}\frac{2z-3}{z-2}\frac{dz}{z-1}=\left.\frac{2z-3}{z-2}\right|_{z=1}=1.\end{aligned}$$

2）用路西定理　令 $f(z)=-3z+2, g(z)=z^2$. 在圆周 $|z|=\frac{3}{2}$ 上有

$$|f(z)|\geqslant 3|z|-2=4.5-2=2.5,$$
$$|g(z)|=|z^2|=2.25.$$

所以，在 $|z|=\frac{3}{2}$ 上，$|f(z)|>|g(z)|>0$.

而 $f(z)$ 在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内只有一个根 $z=\frac{2}{3}$，从而确定 $z^2-3z+2=0$ 在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内只有一个根，即 $N=1$.

3）用解方程法　解二次方程 $z^2-3z+2=0$，得

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2,\\1.\end{cases}$$

但 $z=2$ 在 $|z|=\frac{3}{2}$ 外，所以 $z^2-3z+2=0$ 在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内只有一个根.

(2) 令 $f(z)=-5z^4-2$, $g(z)=z^7+z^2$. $-5z^4-2=0$. 有四个根 $z_k=\sqrt[4]{\frac{2}{5}}e^{i(\pi+2k\pi)/4}(k=0,1,2,3)$. $|z_k|=\sqrt[4]{\frac{2}{5}}<1$. 所以四个根全在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内. 因而 $z^7-5z^4+z^2-2=0$ 在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内有四个根.

例 13　证明方程 $e^{z-\lambda}=z\ (\lambda=1)$ 在 $|z|<1$ 内只有一个根.

证　令 $f(z)=-z, g(z)=e^{z-\lambda}$. 在 $|z|=1$ 上，有

$$|f(z)|=1>|g(z)|=|e^{z-\lambda}|=e^{z-\lambda}>0.$$

而 $f(z)=-z=0$ 在 $|z|<1$ 内有一个零点，所以方程 $e^{z-\lambda}=z\ (\lambda>1)$ 在 $|z|<1$ 内只有一个根.

例 14　设多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\ a_0\neq 0,$$

满足条件 $|a_i|>|a_0|+\cdots+|a_{i-1}|+|a_{i+1}|+\cdots+|a_n|$，证明：

$P(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 $n-i$ 个零点.

证 令 $f(z)=a_i z^{n-i}$, $g(z)=P(z)-f(z)$. 则 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)|=|a_i|>|g(z)|$. 而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 $n-i$ 个零点，故依路西定理，$P(z)=f(z)+g(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 $n-i$ 个零点.

例 15 若方程 $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_n=0$ $(a_n\neq 0)$ 在虚轴上没有根，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\Delta_{L_R}\arg f(z)=-n\pi$. 其中 L_R 为圆周 $|z|=R$ 在虚轴上的直径. 则方程的根都在半平面 $\mathrm{Re}(z)<0$ 内.

证 取圆周 $|z|=R$ 的右半圆周为 C_R，则 $C_R+L_R=\Gamma_R$ 组成闭路，取正方向.

$$设\ f(z)=z^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}=0,\quad a_n\neq 0,$$

又
$$\begin{aligned}f(z)&=z^n\left[1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n z^n}\right]\\&=z^n[1+\varphi(z)],\end{aligned}$$

$$\varphi(z)=\frac{a_{n-1}}{a_n z}+\frac{a_{n-2}}{a_n z^2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n z^n},$$

于是
$$\Delta_{C_R}\arg f(z)=\Delta_{C_R}\arg z^n+\Delta_{C_R}\arg[1+\varphi(z)].$$

显然 $\Delta_{C_R}\arg z^n=n\pi$. 又当 $|z|=R\to\infty$ 时有

$$|\varphi(z)|\leqslant\left[\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\frac{1}{R}+\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|\frac{1}{R^2}+\cdots+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\frac{1}{R^n}\right]\to 0.$$

所以
$$\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg[1+\varphi(z)]=0.$$

因而
$$\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg f(z)=\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg z^n=n\pi,$$

故
$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\Delta_{L_R}\arg f(z)&=\lim_{R\to\infty}[\Delta_{C_R}\arg f(z)+\Delta_{L_R}\arg f(z)]\\&=n\pi+(-n\pi)=0.\end{aligned}$$

例 16 证明：方程 $a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta=0$ 当 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$ 时，在区间 $0<\theta<2\pi$ 上有且仅有 $2n$ 个互异的根，且没有虚根.

证 由第三章第三节例 21 知，多项式 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots$

$+ a_n z^n$ 全部零点都在 $|z| < 1$ 内，且无正实根（只需作代换 $\zeta = \dfrac{1}{z}$ 即可）.

令 z 在 $|z| = 1$ 上正向绕行一周，由辐角原理，$P(z)$ 绕原点 n 周（根的个数），且与虚轴至少相交 $2n$ 次由于每个交点对应一个辐角，故至少有 $2n$ 个 θ 使 $P(z) = P(e^{i\theta})$ 在虚轴上，使

$$\mathrm{Re}[P(e^{i\theta})] = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos\theta + \cdots + a_n\cos 2n\theta = 0.$$

令 $z = e^{i\theta}, \cos k\theta = \dfrac{z^k + z^{-k}}{2}$，就有

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\theta = \frac{z^{-n}}{2}(a_n + a_{n-1}z + \cdots + 2a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + \cdots + a_n z^{2n}),$$

因为等式右边至多有 $2n$ 个根 $z_j (1 \leqslant j \leqslant 2n)$，所以在 $(0, 2\pi)$ 内也至多只有 $2n$ 个实数 $\theta_j (1 \leqslant j \leqslant 2n)$ 满足 $e^{i\theta} = z_j (1 \leqslant j \leqslant 2n)$. 所以 $\mathrm{Re}[P(e^{i\theta})] = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 $2n$ 个实根，不存在虚根.

第六章　共 形 映 射

共形映射又称为保形映射，是复变函数几何理论的重要部分，是 用几何方法来研究解析函数性质的. 本章介绍了共形映射的概念、共形映射的两类基本问题. 讨论了初等函数及某些特殊函数构成的映射. 读者应掌握一些常用的映射及其应用方面的知识.

第一节　共形映射的概念

主 要 内 容

1. 对于z平面内的一条有向连续曲线$C: z=z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，如果$z'(t_0) \neq 0, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，则表示$z'(t_0)$的向量与$C$相切于点$z=z(t_0)$.

(1) $\mathrm{Arg}z'(t_0)$表示C上点z_0处的切线正向(与C的正向一致)与x轴正向之间的夹角.

(2) 相交于一点的两条曲线C_1与C_2之间的夹角就是C_1与C_2在交点处的两条切线正向之间的夹角.

2. 解析函数的导数的几何意义与性质

设$w=f(z)$为区域D内的解析函数，z_0为D内一点. 若$z=z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，则$w'(t)=f'(z_0)z'(t_0)$.

(1) 导数$f'(z_0) \neq 0$的辐角$\mathrm{Arg}f'(z_0)$是曲线C经过$w=f(z)$映射后在z_0处的转动角，转动角的大小与方向跟曲线C的形状与方向无关. 即映射具有转动角的不变性.

(2) 导数的模 $|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ 称为曲线 C 在 z_0 的伸缩率，是经过映射 $w = f(z)$ 后通过 z_0 的任何曲线 C 在 z_0 的伸缩率，它与曲线 C 的形状与方向无关. 即映射 $w = f(z)$ 具有伸缩率的不变性.

定理 1 设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，且 $f'(z_0) \neq 0$，则映射 $w = f(z)$ 在 z_0 具有以下两个性质：

(1) 保角性　通过 z_0 的两条曲线间的夹角跟经过映射后所得两曲线的夹角在大小和方向上保持不变.

(2) 伸缩率不变性　通过 z_0 的任何一条曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$，而与曲线 C 的形状与大小无关.

3. 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的邻域是一一对应的，在 z_0 具有保角性与伸缩率不变性，则称映射 $w = f(z)$ 在 z_0 是共形的，或称 $w = f(z)$ 在 z_0 是共形映射的. 如果映射在 D 内的每一点都是共形的，则称 $w = f(z)$ 是区域 D 内的共形映射.

定理 2 如果函数 $w = f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f'(z_0) \neq 0$，则称 $w = f(z)$ 是共形的，而且 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 表示这个映射在 z_0 的转动角，$|f'(z_0)|$ 表示伸缩率.

如果解析函数 $w = f(z)$ 在 D 内处处有 $f'(z) \neq 0$，则映射 $w = f(z)$ 是 D 内的共形映射.

凡是具有伸缩率不变性与保角性的映射称为第一类共形映射；如果映射 $w = f(z)$ 具有伸缩率的不变性，但只保持夹角的大小而方向相反，则称映射为第二类共形映射.

疑 难 解 析

1. 具有伸缩率不变性与保角性的映射为什么称为保形映射？

答　若映射 $w = f(z)$ 在 $f'(z) \neq 0$ 的点具有保角性和伸缩率不变性，就能够把一个在 z_0 邻域内的任意小三角形映射为 z_0 的

对应点 $w_0=f(z_0)$ 的邻域内的一个曲边三角形. 这两个三角形的对应角相等(保角性),对应边近似成比例(即伸缩率不变性),因此两三角形近似相似,三角形越小,近似程度越好(因为不同的点伸缩率不同). 所以,映射被称为保形映射.

2. 保形映射要解决哪些问题?

答　保形映射要解决两类问题:

(1) 已知区域 D 及映射 $w=f(z)$,求区域 D 在映射 $w=f(z)$ 下的像域 G.

(2) 已知区域 D 及区域 G,求将区域 D 共形地映射为区域 G 的解析函数 $w=f(z)$.

第一类问题是基础的,第二类问题是基础上的应用,是我们应努力掌握的.

3. 为什么说解析函数 $w=f(z)$ 的映射在 z_0 的旋转角和伸缩率与过 z_0 的曲线 C 的形状与方向无关?

答　若 C 为过 z_0 点的一条光滑曲线,$C: z=z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$. 则在解析函数 $w=f(z)$ 的映射下,旋转角 $\operatorname{Arg} f'(z_0)=\operatorname{Arg} w'(t_0)-\operatorname{Arg} z'(t_0)$,只依赖于 z_0 与像点 w_0,即与曲线 C 的形状与方向无关.

不妨选择另外一条过 z_0 的光滑曲线 $C: z=z_1(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$. 记在 $w=f(z)$ 下 C_1 的像曲线为 Γ_1,Γ_1 的参数方程为 $w=f[z_1(t)]$,$w_0=f[z_1(t_0)]$,则 C_1 过点 z_0 的切线到 Γ_1 过 z_0 的切线的旋转角仍然是

$$\operatorname{Arg} f'[z_1 t_0] z_1'(t_0)-\operatorname{Arg} z_1'(t_0)=\operatorname{Arg} f'[z_1(t_0)]=\operatorname{Arg} f'(z_0).$$

而伸缩率为 $|f'(z_0)|=\lim\limits_{z \to z_0}\left|\dfrac{w-w_0}{z-z_0}\right|$,从中即可看出,伸缩率只与点 z_0 与 w_0 有关,而与 C 的形状与方向无关.

4. 为什么单叶解析函数的映射是保形映射?

答　若函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析,且当 $z_1 \neq z_2$ 时,$f(z_1) \neq f(z_2)$,则称函数 $f(z)$ 在 G 内是单叶解析的. 可以证明(略),在 G

内单叶解析的函数 $f(z)$，在 G 内任一点 z 处，都有 $f'(z)\neq 0$.

于是，我们知 $w=f(z)$ 的映射为保形映射.

方法、技巧与典型例题分析

要确定一个函数的映射是否共形映射，首先是考察函数 $f(z)$ 是否为解析函数. 若是，再考察是否有 $f'(z_0)\neq 0$，是否有转动角和伸缩率的不变性或者是否处处解析，最终确定是否为共形映射. 讨论映射和图形时，要从转动角和伸缩率两方面着手，考察图形的变化.

例 1 讨论下列函数构成的映射的特点：

(1) $f(z)=w=z+2+\mathrm{i}$;

(2) $f(z)=w=(1+\mathrm{i})z+2\mathrm{i}$.

解 (1) 因为 $f'(z)=1\neq 0$，且 $f(z)$ 是单叶解析，所以 $w=f(z)$ 是保形映射.

由 $|f'(z)|=1$ 知，伸缩率为 1. 又 $\arg f'(z)=\arg 1$，可取 $\theta=0$，所以映射 $w=f(z)$ 在将 z 平面上图形映到 w 平面上时，既不转动又无伸缩，只是沿着表示 $2+\mathrm{i}$ 的向量方向平移了距离 $|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，如图 6.1 所示.

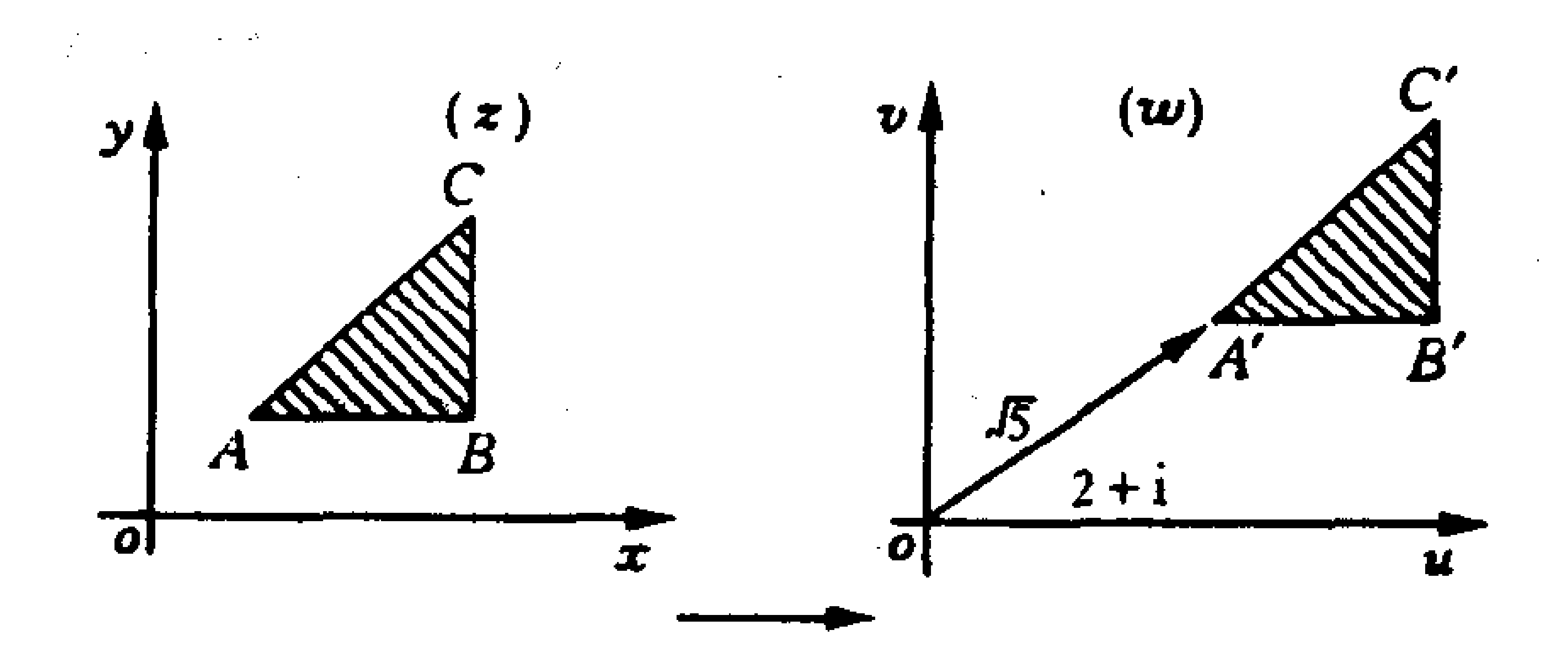


图 6.1

显然，若 $w=z$，则把每个点映为自己，故又称恒等变换.

(2) 因为 $w=w_1+2\mathrm{i}$，$w_1=(1+\mathrm{i})z$，$w'=1+\mathrm{i}$，所以，$|w_1'|$

$=\sqrt{2}$，$\arg w_1'=\arg(1+\mathrm{i})$，$\theta=\frac{\pi}{4}$. 于是，$w_1$ 是把图形旋转了 $\frac{\pi}{4}$，又伸长了 $\sqrt{2}$ 倍，而 $w=w_1+2\mathrm{i}$ 则是将经过旋转 $\frac{\pi}{4}$，伸长 $\sqrt{2}$ 的图形又在 $2\mathrm{i}$ 的向量方向平移了距离 2.

例 2 求映射 $w=(z+1)^2$ 的等伸缩率和等旋转角的轨迹方程.

解 因为 $w'=[(z+1)^2]'=2(z+1)$，所以等伸缩率的轨迹方程

$$|z+1|=C\quad(C>0)$$

是以 -1 为圆心、C 为半径的圆周方程.

等旋转角的方程

$$\arg 2(z+1)=C_1\quad 或\quad \arg(z+1)=C_2$$

是一条从 -1 出发的射线.

例 3 求 $w=z^2$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处的伸缩率和旋转角. 问：$w=z^2$ 将经过点 $z=\mathrm{i}$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上哪一个方向？

解 因为 $w'=2z$，所以 $w'(\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，$|w'|=2$，旋转角 $\arg w'=\frac{\pi}{2}$. 于是，经过点 i 且平行实轴正向的向量映为 w 平面上过点 -1，且方向垂直向上的向量，如图 6.2 所示.

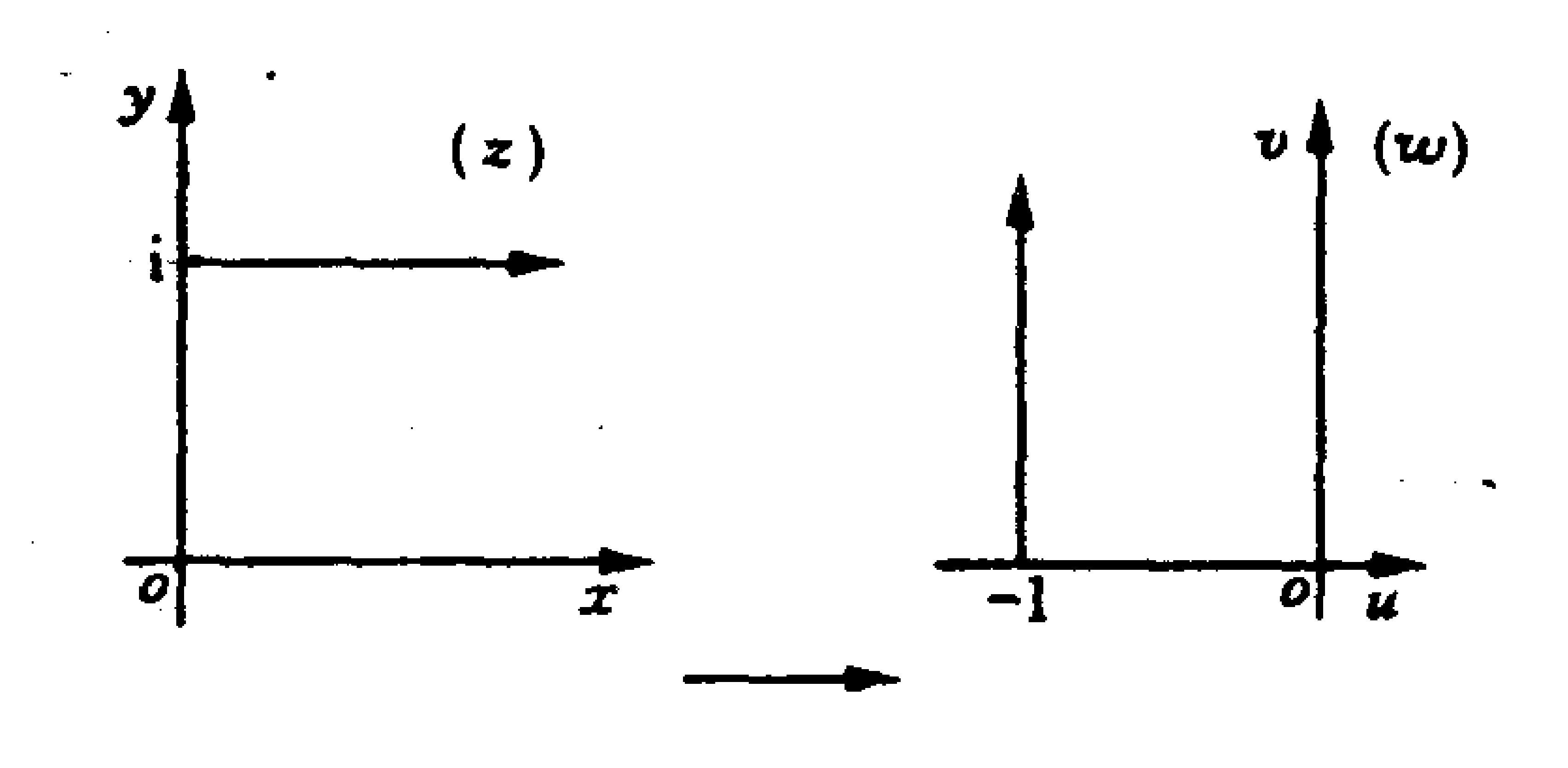


图 6.2

例 4 函数 $w=z^2$ 和 $w=z^3$ 在什么区间内单叶解析？$w=z^2$

在什么区域上具有旋转角与伸缩率的不变性?

解 (1) 若 $z_1 \neq z_2$,但 $z_1^2 = z_2^2$,则必 $z_1 = -z_2$. 因此,对于一个区域,其中任意两点 z_1, z_2,既有 $z_1 \neq z_2$ 又有 $z_1 \neq -z_2$,就是 $w = z^2$ 的单叶性区域,如 $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + \pi$ (θ_0 是任何实数).

因为 $w' = (z^2)' = 2z$,仅当 $z = 0$ 时 $w' = 0$,因此 $w = z^2$ 在复平面上除 $z = 0$ 外处处具有旋转角与伸缩率的不变性.

(2) 若 $z_1 \neq z_2$,但 $z_1^3 = z_2^3$,则必 $z_1 = e^{i2\pi/3}z_2$ 或 $z_1 = e^{i4\pi/3}z_2$. 因此,对于一个区域,其中任意两点 $z_1 \neq z_2$,又 $z_1 \neq e^{i2\pi/3}z_2, z_1 \neq e^{i4\pi/3}z_2$,就是 $w = z^3$ 的单叶性区域,如 $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + \frac{2}{3}\pi$ (θ_0 是任何实数).

例 5 设变量 $z = x + iy$ 描出曲线为 $x = 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$,求这条曲线在映射 $w = z^3$ 下的参数方程.

解 令 $z = 1 + it\ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$,则 $w = z^3 = (1 + it)^3 = 1 + 3it - 3t^2 - it^3$,所以其参数方程为

$$\begin{cases} u = 1 - 3t^2, \\ v = 3t - t^3, \end{cases} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

例 6 求下列映射在点 $z_0 = -1 + 2i$ 处的旋转角,并指出映射分别将 z 平面的哪一部分放大了,哪一部分缩小了.

(1) $w = f(z) = z^2 + 2z$; (2) $w = g(z) = \ln(z - 1)$.

解 (1) $f'(z) = 2z + 2$,在点 $z_0 = -1 + 2i$ 处有

$$f'(-1 + 2i) = 4i, \quad \arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2},$$

$$|f'(z)| = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

当 $|f'(z)| < 1$ 时,即在区域 $(x + 1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ 时图形缩小,在区域 $(x + 1)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$ 时图形放大.

(2) $g'(z) = \frac{1}{z - 1}$,在点 $z_0 = -1 + 2i$ 处有

$$g'(-1+2\mathrm{i})=-\frac{1}{4}(\mathrm{i}+1),\quad \arg\left[-\frac{1}{4}(\mathrm{i}+1)\right]=-\frac{3}{4}\pi,$$

$$|g'(z)|=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

当 $|g'(z)|<1$ 时，即在区域 $(x-1)^2+y^2>1$ 时图形缩小，在区域 $(x-1)^2+y^2<1$ 时图形放大.

例 7　在映射 $w=\mathrm{i}z$ 下，下列图形映为什么图形？

(1) 以 $z_1=\mathrm{i}, z_2=-1, z_3=1$ 为顶点的三角形；

(2) 圆形 $|z-1|=1$.

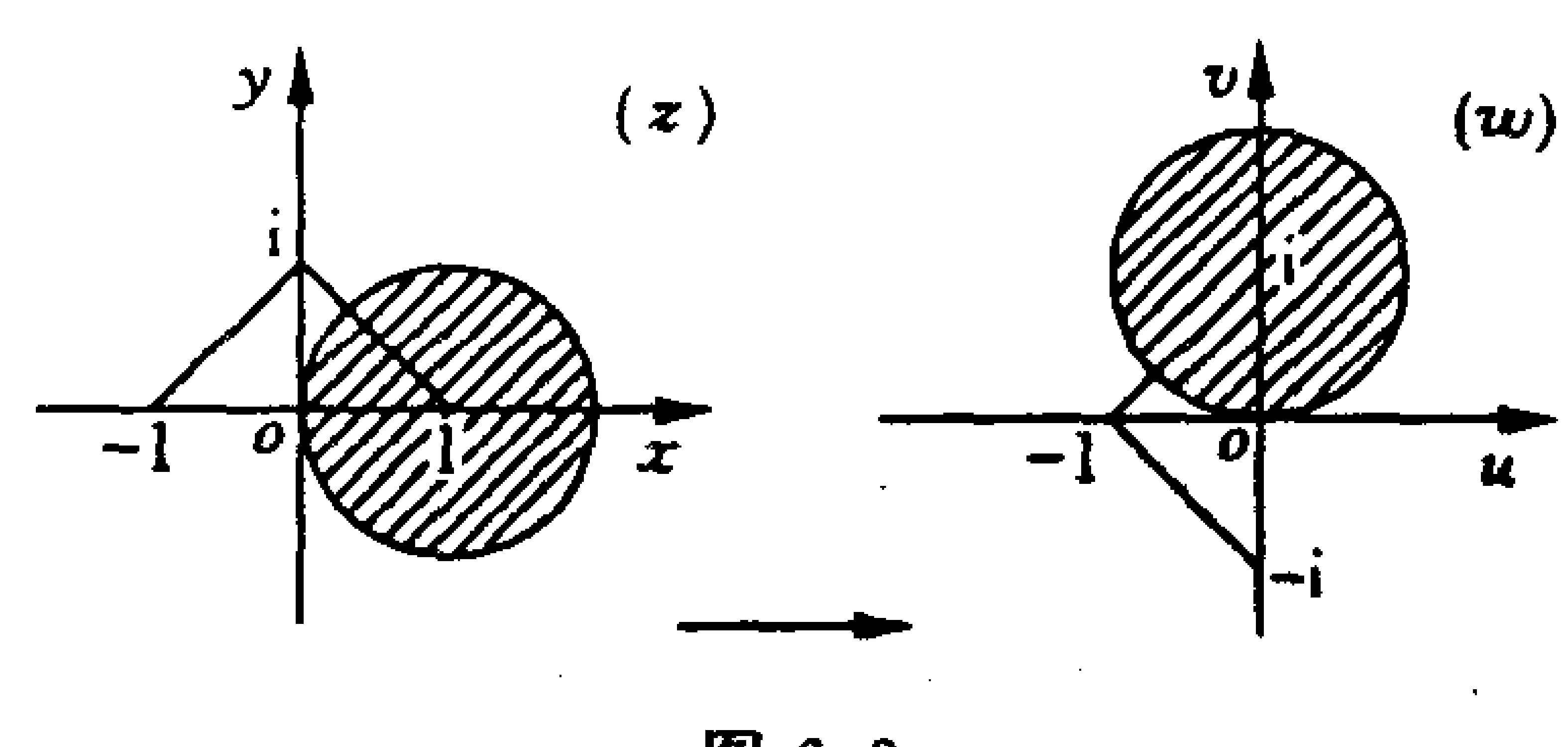


图 6.3

解　因为 $w'=\mathrm{i}$，所以 $|w'|=1, \arg w'=\arg \mathrm{i}$. 即伸缩率为 1，旋转角为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 映为以 $w_1=-1, w_2=-\mathrm{i}, w_3=\mathrm{i}$ 为顶点的三角形.

(2) 映为圆域 $|w-\mathrm{i}|\leqslant 1$.

例 8　映射 $w=z^2$ 把上半个圆域：$|z|<R, \mathrm{Im}(z)>0$ 映为什么区域？

解　因为 $w'=2z$，除原点外处处共形，所以将上半个圆域：$|z|<R, \mathrm{Im}(z)>0$ 映为 $|w|=R^2, 0\leqslant \arg w\leqslant 2\pi$. 即以原点为中心，去掉正实轴的圆的内部.

例 9　设 z 平面上的面积微元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在解析函数 $w=f(z)$ 的映射下，证明：w 平面的面积微元为 $|f'(z)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 若 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，何时有

$$G\text{ 的面积} = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y?$$

证 如图 6.4 所示，因为 $|\mathrm{d}w| = |f'(z)||\mathrm{d}z|$，所以像的面积微元在伸缩率不变性下为 $|\mathrm{d}w|^2 = |f'(z)|^2|\mathrm{d}z|^2 = |f'(z)|^2|\mathrm{d}x||\mathrm{d}y|$，即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 经映射后的面积为 $|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

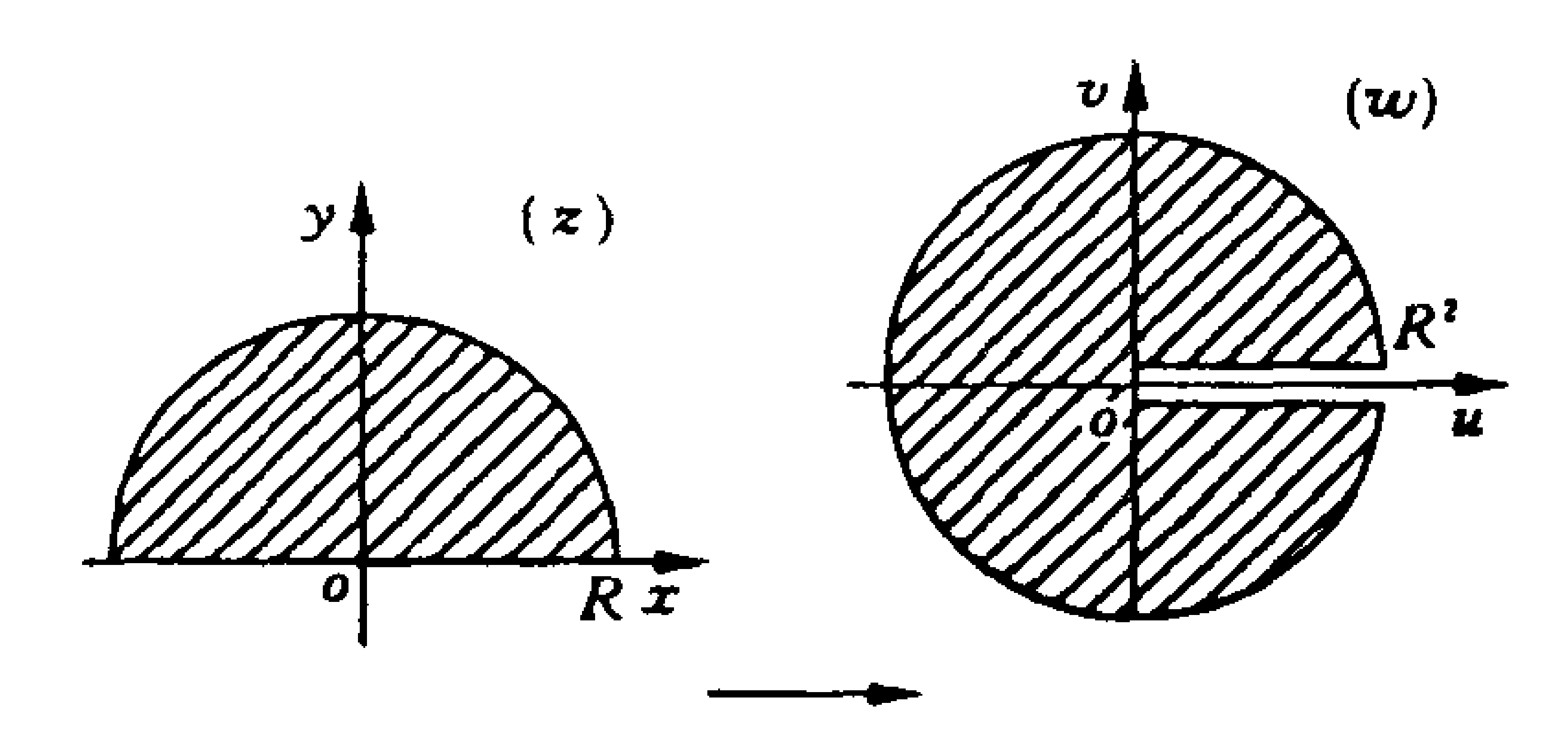


图 6.4

当 $w = f(z)$ 是单叶解析的，有

$$G\text{ 的面积} = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

否则不成立. 如对 $w = z^2$，将 $|z| < 1$ 映为 $|w| < 1$.

$$G\text{ 的面积} \neq \iint_{|z|=1} 4|z|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1\int_0^{2\pi} t^3 \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

例 10 利用上例结论，当 z 在 $D: 1 \leqslant |z| \leqslant 2, -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$ 上变化时，函数 $w = z^2$ 的值域的面积是多少？

解 因为 $w = z^2$ 在上述区域是单叶解析的(见例 4)，所以可用例 9 结论，像的面积为

$$\iint_D |2z|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 4r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{15}{2}\pi.$$

例 11 设 $w = f(z)$ 在圆 $|z| < 1$ 内解析，导数处处不为零. 证明：圆周 $|z| = r\ (r < 1)$ 在 $w = f(z)$ 的映射下，像曲线的曲率等于

$$k=\frac{1+\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}}{|zf'(z)|}.$$

证　若以 $\mathrm{d}s,\mathrm{d}L$ 分别表示 z,w 平面上的弧微分，则由 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内是共形映射.

$$\mathrm{d}L=|f'(z)|\mathrm{d}s=|f'(z)|r\mathrm{d}\theta,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s}=|zf'(z)|.$$

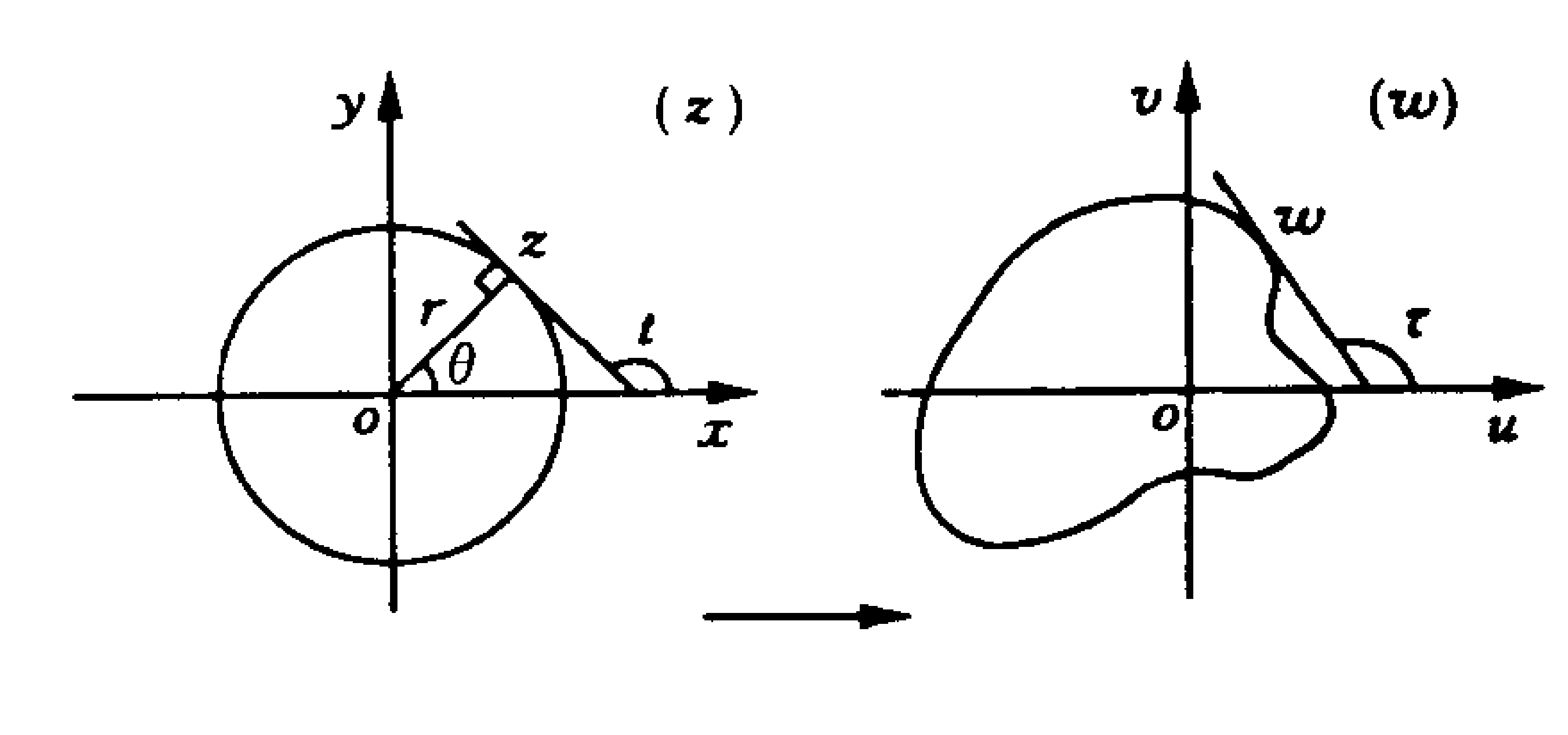


图 6.5

依曲率定义，有

$$k=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\theta}{|zf'(z)|},$$

但由转动角的关系，知

$$\tau=t+\operatorname{Arg}f'(z)=\frac{\pi}{2}+\theta+\operatorname{Arg}f'(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}=1+\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Arg}f'(z).$$

又
$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{\mathrm{d}[\operatorname{Ln}f'(z)]}{\mathrm{d}\operatorname{Ln}z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Ln}f'(z),$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Arg}f'(z),$$

从而
$$k=\frac{1+\operatorname{Re}\{zf''(z)/f'(z)\}}{|zf'(z)|}.$$

例 12　证明：映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 把圆周 $|z|=C$ 映为椭圆：

$$u=\left(C+\frac{1}{C}\right)\cos\theta,\quad v=\left(C-\frac{1}{C}\right)\sin\theta.$$

证　设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，$w = \mathrm{i} + \mathrm{i}v$. 因为

$$w = z + \frac{1}{z} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$$

$$= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{r}$$

$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

由 $|z| = C, r = C$，所以

$$w = \left(C + \frac{1}{C}\right)\cos\theta + \mathrm{i}\left(C - \frac{1}{C}\right)\sin\theta,$$

即

$$u = \left(C + \frac{1}{C}\right)\cos\theta,\quad v = \left(C - \frac{1}{C}\right)\sin\theta.$$

例 13　证明：在映射 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下，互相正交的直线族 $\mathrm{Re}(z) = C_1$ 与 $\mathrm{Im}(z) = C_2$ 依次映为互相正交的直线族 $v = u\tan C_1$ 与圆族 $u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{-2C_2}$.

证　设 $z = x + \mathrm{i}y,\quad w = u + \mathrm{i}v$.

由 $\mathrm{Re}(z) = C_1, \mathrm{Im}(z) = C_2$，知 $x = C_1, y = C_2$.

由 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)$，知

$$u = \mathrm{e}^{-y}\cos x,\ v = \mathrm{e}^{-y}\sin x.$$

所以，在映射 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下，直线族 $\mathrm{Re}(z) = C_1$ 映为直线族 $\frac{v}{u} = \tan x = \tan C_1$；直线族 $\mathrm{Im}(z) = C_2$ 映为圆族 $u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{-2y} = \mathrm{e}^{-2C_2}$. 两者显然正交.

第二节　分式线性映射

主 要 内 容

1. 由 $w = \dfrac{az + b}{cz + d}\ (ad - bc \neq 0)$ 定义的共形映射称为分式线

性映射. 其中 a,b,c,d 为常数.

分式线性映射可以写为(上式两边乘以 $cz+d$)

$$cwz + dw - az - b = 0,$$

则对每个固定的 w,关于 z 是线性的;对每个固定的 z,关于 w 是线性的. 故分式线性映射又称双线性映射.

$w = \dfrac{ax+b}{cz+d}$ 的逆映射

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad ((-a)(-d) - bc \neq 0)$$

也是分式线性映射.

两个线性映射的复合也是分式线性映射. 如

$$w = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

$$\zeta = \frac{\alpha' z+\beta'}{\gamma' z+\delta'} \quad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0),$$

复合可得

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') \neq 0).$$

2. 一般分式线性映射 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 可以看成是由下列各映射复合而成的:

(1) $w = z + b$,是一个平移映射;

(2) $w = az$,是一个旋转与伸缩映射;

(3) $w = \dfrac{1}{z}$,是一个反演映射,是两个对称变换 $w_1 = \dfrac{1}{\bar{z}}$ 与 $w = \overline{w}$ 的复合.

3. 关于圆周的一对对称点

设 C 为以原点为圆心、r 为半径的圆周. 若在以圆心为起点的一条半直线上,有两个点 P 与 P' 满足关系式 $oP \cdot oP' = r^2$,就称这两点为圆周 C 的一对对称点.

具体做法是:从圆周外点 P 作圆周 C 的切线 PT,由 T 作 oP 的

垂线 TP'，与 oP 交于 P'，则 P 与 P' 为一对对称点(见图 6.6).

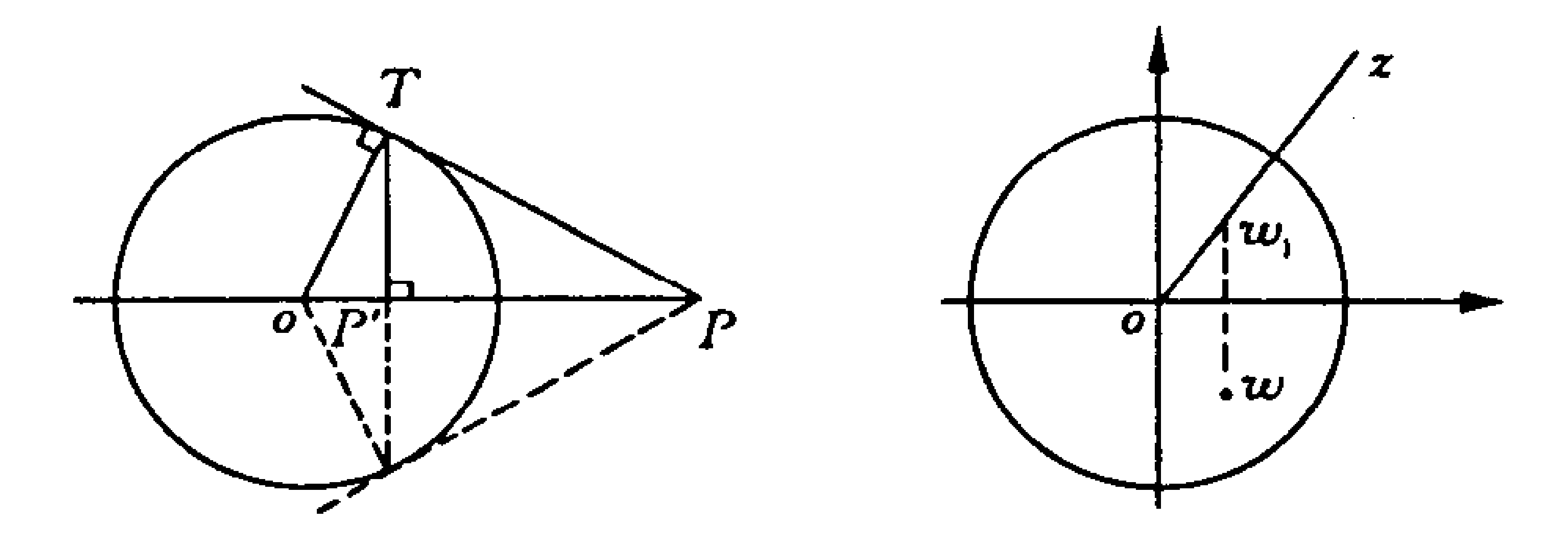


图 6.6

P' 即图中的 w_1，再作关于实轴的对称点即得 $w = \dfrac{1}{z}$.

4. 分式线性映射的性质

(1) 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的，且具有保角性.

(2) 分式线性映射将扩充 z 平面上的圆周映为扩充 w 平面上的圆周，则称分式线性映射具有保圆性.

如果给定的圆周或直线上没有点映成无穷远点，则它映为半径为有限的圆周；如果有一个点映为无穷远点，则它映为直线.

(3) 分式线性映射将关于圆周 C 对称的两个点映为关于 C 的像曲线 Γ 的一对对称点(直线看作半径为无限且经过 ∞ 点的圆周)则称分式线性映射具有保对称性.

(4) 分式线性映射将 z 平面上三个相异的点 z_1, z_2, z_3 映为 w 平面上三个相异的点 w_1, w_2, w_3，且使交比

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

保持不变，则称有保交比不变性.

5. 如果给定 z 平面上任意三个相异的点 z_1, z_2, z_3，在 w 平面上也任意给定三个相异的点 w_1, w_2, w_3，则将 $z_k (k = 1,2,3)$ 依次映为 $w_k (k = 1,2,3)$ 的分式线性映射是惟一存在的，$w = f(z)$ 满足

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

6. 在分式线性映射下，如果在圆周 C 内任取一点 z_0，而点 z_0 的像在 C 的像 C' 的内部，则 C 的内部就映为 C' 的内部；如果 z_0 的像在 C' 的外部，则 C 的内部就映为 C' 的外部.

如果在 C 上取定三点 z_1,z_2,z_3，它们在 C' 上的像为 w_1,w_2,w_3. 而 C 依 $z_1\to z_2\to z_3$ 的绕向与 C' 依 $w_1\to w_2\to w_3$ 的绕向如果相同时，C 的内部就映为 C 的内部；绕向相反时，C 的内部就映为 C' 的外部.

这两条准则是确定映射区域对应的依据.

7. 在分式线性映射下，当两圆周上没有点映射成无穷远点时，这两圆周的弧所围成的区域映射成两圆弧所围成的区域；当两圆周上有一个点映射成无穷远点时，这两圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域；当两圆周交点中的一个映为无穷远点时，这两圆周的弧所围成的区域映射成角形区域.

8. 三种典型区域之间的共形映射

(1) 上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 到上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的分式线性映射是：$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，其中 a,b,c,d 为实常数，且 $ad-bc>0$.

具有这一形式的映射也将下半平面 $\mathrm{Im}(z)<0$ 映为下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$. 一般利用在 z 平面实轴上取三个相异点 $z_1<z_2<z_3$ 和在 w 平面实轴上的三个相应对应点 $w_1<w_2<w_3$，由交比不变性即可求得.

(2) 上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 到单位圆 $|w|<1$ 内部的分式线性映射是：$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\dfrac{z-\lambda}{z+\lambda}\right)$，其中 θ 为实数，λ 为上半平面内映成圆心 w 的点（$\mathrm{e}^{i\theta}$ 也记成 k）.

(3) 单位圆 $|z|<1$ 映为单位圆 $|w|<1$ 的点的分式线性映射是：$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$ ($|\alpha|<1$). 其中 θ 为实数，α 为单位圆 $|z|$

<1 内的任意一点（$e^{i\theta}$ 也记成 k）.

疑难解析

1. 分式线性映射有几个复参数，几个实参数？有几种方法可以惟一确定一个分式线性映射？

答　分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，a,b,c,d 都是复常数，所以有四个复参数. 由于有约束条件 $ad-bc\neq 0$ 存在，故只有三个独立的复参数. 每个复数均可表为 $a=a_1+ia_2$（a_1,a_2 为实数），故分式线性映射有六个独立的实参数.

由于一个分式线性映射有三个独立的复参数，因此给定三个条件就可以惟一确定一个分式线性映射. 常用以下两种方法.

(1) 给定 z 平面上三个相异的点和 w 平面上三个相异的点，当确定对应关系后，由交比不变性可以惟一确定一个分式线性映射.

(2) 若给定一个圆周映为一个圆周（或直线），要求某一定点映为某一像点，并且此点上某一方向映为像点上某一方向，也能惟一确定一个分式线性映射.

2. 为什么说"交比不变性"惟一确定一个分式线性映射？

答
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\tag{1}$$

可写为
$$\frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}\tag{2}$$

惟一确定一个分式线性映射，因为可以代入直接验证：当 $z=z_1,z_2,z_3$ 时，$w=w_1,w_2,w_3$.

令 $\lambda=\dfrac{(w_3-w_1)(z_3-z_2)}{(w_3-w_2)(z_3-z_1)}$ $(\lambda\neq 0)$，则式(2)化为 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}=\lambda\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$，因为 z_1,z_2,z_3 不相等，w_1,w_2,w_3 也不相等，令

$$a=w_1-\lambda w_2,\ b=w_2z_1-w_1z_2,\ c=1-\lambda,\ d=\lambda z_1-z_2,$$

则 $$w=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$$

$$(ad-bc=(w_1-\lambda w_2)(\lambda z_1-z_2)-(w_2z_1-w_1z_2)(1-\lambda)$$
$$=\lambda(w_1-w_2)(z_1-z_2)\neq 0).$$

所以式(2) 表示一个分式线性映射.

当分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 满足条件

$$w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d}\ (k=1,2,3)$$

时,分式线性映射是惟一的.

在 z_1,z_2,z_3 和 w_1,w_2,w_3 中出现 ∞ 时可以这样处理:如 $z_3=\infty$,则先令 z_3 换成有限点 z_3',然后令 $z_3'\to\infty$. 这时,式(2) 中出现 $\dfrac{z_3'-z_2}{z_3'-z_1}\xrightarrow{z_3'\to\infty}1$. 所以,凡某已知点为 ∞ 时,直接换成 1 就行.

3. 什么是映射的不动点?一个分式线性映射有几个不动点?

答　一个映射 $w=f(z)$,若有 $z=f(z)$,则称点 z 为映射 $w=f(z)$ 的不动点. 对于一般的分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$,不动点最多只有两个.

因为由 $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 得到的一元二次方程

$$cz^2-(a-d)z-b=0$$

至多有两个根,即两个不动点.

若 $w=f(z)$ 有三个或更多不动点,则必为恒等变换 $w=z$.

4. 关于圆周 C 的对称点有什么特性?在分式线性映射中怎样利用对称点的不变性?

答　关于圆周 C 的对称点的定义和求法请参看本章主要内容 3. z_1,z_2 为圆周 C: $|z-z_0|=R$ 的一对对称点的充要条件是:经过 z_1,z_2 的圆周 Γ 与 C 正交.

如图 6.7 所示,作 z_0z' 与 Γ 相切,z' 为 Γ 上切点. 则

$$|z'-z_0|^2=|z_2-z_0||z_1-z_0|,$$

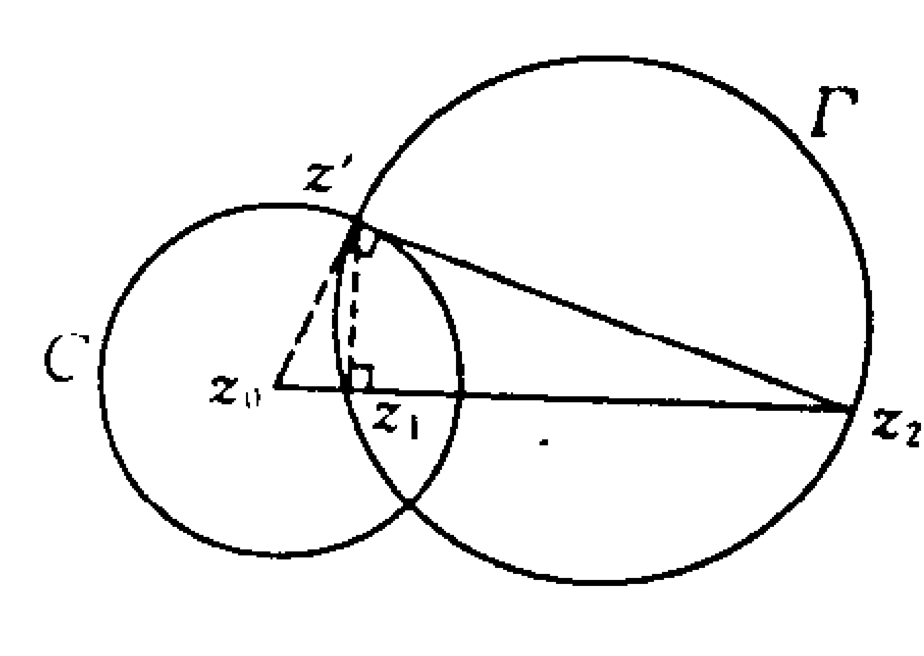


图 6.7

由对称点定义知，$|z'-z_0|^2=R^2$，故 z' 在 C 上. 而 Γ 的切线即 C 的半径，所以 Γ 与 C 正交. 反之，若 Γ 过 z_1 与 z_2 且与 C 正交，则直线 z_1z_2 与 C 正交，并且过 z_0. 而 Γ 与 C 正交于 z'，则 C 的半径 z_0z' 即 Γ 的切线，故 $|z_1-z_0||z_2-z_0|=R^2$，即知 z_1 与 z_2 是关于圆周 C 的一对对称点.

又，z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

在将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为单位圆内部 $|w|<1$ 的分式线性映射就利用了对称点的不变性.

设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将点 $z=\alpha$ 映为 $w=0$，则由对称点的不变性 $z=\bar{\alpha}$ 映为 $w=\infty$，且

$$a\alpha+b=0\Longrightarrow b=-a\alpha,\quad c\bar{\alpha}+d=0\Longrightarrow d=-c\alpha.$$

于是
$$w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

再由 $z=0$ 与 $|w|=1$ 上某点对应，得

$$\left|\frac{a}{c}\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

所以
$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\ (\mathrm{Im}(\alpha)>0).$$

5. 怎样理解一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{az+d}$？

答 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 称为分式线性映射，要求 $ad-bc\neq 0$，否则 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}=0$，$w\equiv A$，$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 z 平面上点映射 w 平面上一个点，不是共形映射.

$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 由 $w_1=z+b$，$w=\alpha z$，$w=\dfrac{1}{z}$ 复合而成.

(1) $w=z+b$ 是将 z 平移距离 b 的映射(见图 6.8(a))；

(2) $w=\alpha z$ 是旋转映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ 或伸缩映射 $w=\lambda z$(见

图 6.8(b)、(c))；

(3) $w=\frac{1}{z}$ 是倒数映射(两次对称变换见图 6.8(d),(e)).

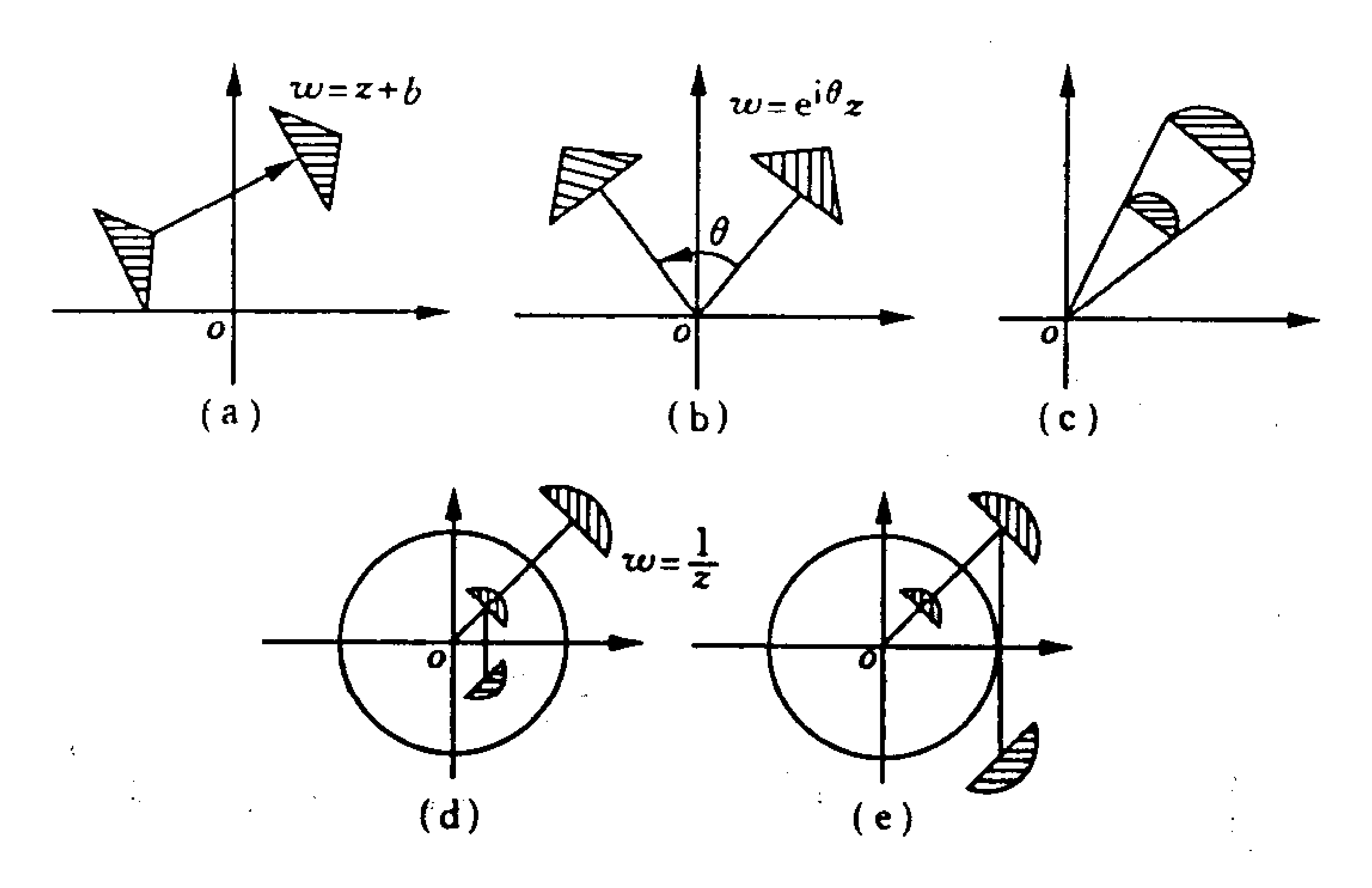


图 6.8

在讨论分式线性映射时，就以这四种基本映射为基础来寻找结论(图中将 z 平面与 w 平面重合在一起).

6. 将 z 平面上单位圆内部 $|z|<1$ 映为 w 平面上单位圆内部 $|w|<1$ 的映射 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$ 中，实数 θ 的几何意义是什么？

答　θ 是映射 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$ 在单位圆内点 α 处的旋转角 $\arg w'(\alpha)$. 因为

$$w'(z)=e^{i\theta}\frac{1-\alpha\overline{\alpha}}{(1-\overline{\alpha}z)^2},\quad w'(\alpha)=\frac{e^{i\theta}}{1-|\alpha|^2},\quad |\alpha|<1,$$

所以 $$\arg w'(\alpha)=\arg e^{i\theta}-\arg(1-|\alpha|^2)=\theta.$$

方法、技巧与典型例题分析

一、分式线性映射的概念

分式线性映射是一类既简单又重要的映射，通过本部分例题，

我们要加深对分式线性映射概念的理解，熟悉分式线性映射的分解和复合，熟悉保角性、保圆性、保对称性和保交比不变性，并且能分析复参数的取值对图形的影响等等.

例 1 证明：对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可以认为 $ad-bc=1$.

证 分式线性映射要求 $ad-bc\neq 0$，则

$$w=\frac{az/(ad-bc)^{1/2}+b/(ad-bc)^{1/2}}{cz/(ad-bc)^{1/2}+d/(ad-bc)^{1/2}}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}.$$

又 $$a'd'-b'c'=\frac{ad}{ad-bc}-\frac{bc}{ad-bc}=1,$$

即可认为 $ad-bc=1$ 成立.

例 2 证明：对称映射 $w=\bar{z}$ 不是分式线性映射.

证法 1 因为 $w=\bar{z}$，即 $u+\mathrm{i}v=x-\mathrm{i}y$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$，不满足 C-R 条件，即 $w=\bar{z}$ 不解析. 但分式线性映射是解析的. 故 $w=\bar{z}$ 不是分式线性映射.

证法 2 设 $w=\bar{z}$ 是分式线性映射：$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，则

$z=0$ 时，$\bar{z}=0=\dfrac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=\dfrac{b}{d}$；

$z=1$ 时，$\bar{z}=1=\dfrac{a+b}{c+d}$；

$z=-1$ 时，$\bar{z}=-1=\dfrac{-a+b}{-c+d}$.

解得 $b=c=0,d=a$，即 $w=\dfrac{az}{a}=z$ 与 $w=\bar{z}$ 矛盾.

例 3 映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将圆周 $|z|=1$ 映为直线，它的参数应满足什么条件？

解 首先，分式线性映射应满足 $ab-cd\neq 0$.

其次，若 $|z|=1$ 映为直线，则 $|z|=1$ 上某点应映为 ∞，即 cz

$+d=0$,故应有$\left|-\dfrac{d}{c}\right|=1$,即 $|c|=|d|$.

所以,参数应满足 $ab-cd\neq 0$ 且 $|c|=|d|$.

例 4 将映射 $w=\dfrac{3z+4}{iz-1}$ 分解为四个简单映射的复合.

解 将 $w=\dfrac{3z+4}{iz-1}$ 变形,得

$$w=\frac{3z+4}{z+i}\cdot\frac{1}{i}=-3i+\frac{4-3i}{(z+i)}\cdot\frac{1}{i}$$

$$=-3i-(3+4i)\frac{1}{z+i}.$$

所以,$w=\dfrac{3z+4}{iz-1}$ 可以分解为

平移变换 $w_1=z+i$;

倒数变射 $w_2=\dfrac{1}{w_1}, w=w_5-3i$;

伸缩变换 $w_3=|3+4i|w_2=5w_2$;

旋转变换 $w_4=e^{i\theta}w_3,\ \theta=\arctan\dfrac{4}{5},\ w_5=e^{\pi i}w_4$.

例 5 证明:z_1 与 z_2 关于圆周 $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+D=0$ 对称的充要条件是 $Az_1\bar{z}_2+B\bar{z}_2+\bar{B}z_1+D=0$.

证 圆周方程可以化为 $|z-z_0|=R$,其中 $z_0=-\dfrac{B}{A}$,$R=\sqrt{\left|\dfrac{B}{A}\right|^2-\dfrac{D}{A}}>0$ ($A>0$,D 是实数).

若 z_1 和 z_2 关于圆周对称,应有$(z_1-z_0)(z_2-z_0)=R^2$,即

$$\left(z_1+\frac{B}{A}\right)\left(\bar{z}_2+\frac{\bar{B}}{A}\right)=\frac{B\bar{B}}{A^2}-\frac{D}{A}.$$

化为
$$A^2z_1\bar{z}_2+AB\bar{z}_2+ABz_1+B\bar{B}=B\bar{B}-AD,$$
即
$$Az_1\bar{z}_2+B\bar{z}_2+Bz_1+D=0.$$

反之,也成立(读者自己可尝试逆向推出).

例 6 证明:平移变换可以分解为两个关于直线的对称变换.

证 取直线 l_1 为过 $z=0$ 且与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直的直线,l_2 为经过

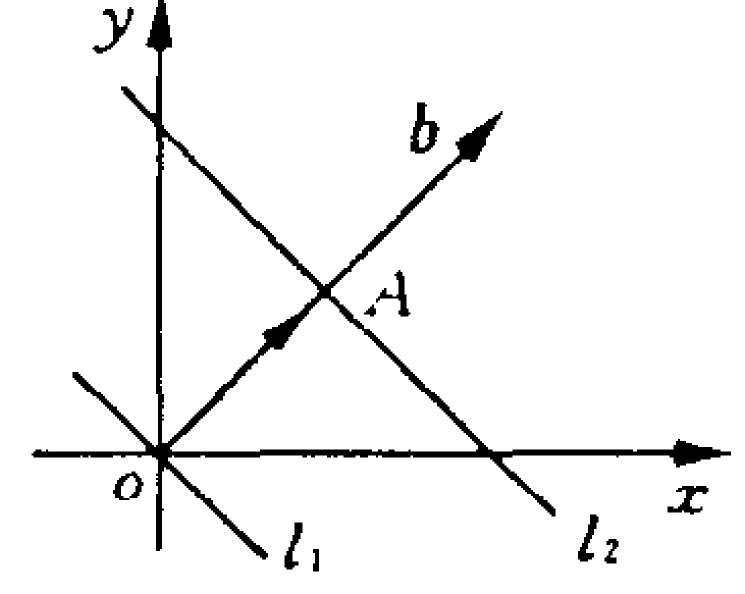


图 6.9

b 的中点 A 且与向量 b 垂直的直线.

设 $b = |b|e^{i\theta_0}$,易证:

(1) z 关于 l_1 的对称映射为 $\zeta = e^{-i2\theta_0}\bar{z}$;

(2) 又关于 l_2 的对称映射为

$$\left(\zeta - \frac{b}{2}\right) = - e^{i2\theta_0}\overline{\left(z - \frac{b}{2}\right)},$$

因此连续地进行两次映射后即可得到

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{b}{2} - e^{i2\theta_0}\overline{\left(- e^{i2\theta_0}\bar{z} - \frac{b}{2}\right)} \\ &= \frac{b}{2} + e^{i2\theta_0}\left(e^{-i2\theta_0}z + \frac{\bar{b}}{2}\right) \\ &= z + \frac{b}{2} + \frac{\bar{b}}{2}e^{i2\theta_0} = z + b.\end{aligned}$$

例 7 证明:相似(伸缩)映射 $w = kz$ $(k > 0)$ 可以分解为两个关于圆周 $|w| = R_1$,$|w| = R_2$ 的对称映射,且 $k = R_1^2/R_2^2$.

证 设第一个圆周半径为 R_1,第二个圆周半径为 R_2,且 $k = R_1^2/R_2^2$,则对任意点 z,作关于 $|z| = R_1$ 的对称映射,得 $w = R_1^2/\bar{z}$;再作关于 $|z| = R_2$ 的对称映射,得 $w_1 = R_2^2/\bar{z}$.

因此连续实施两次对称映射后即可得到

$$w = \frac{R_1^2}{\overline{(R_2^2/\bar{z})}} = \frac{R_1^2}{R_2^2/z} = \frac{R_1^2}{R_2^2}z = kz.$$

例 8 证明:两直线在无穷远点 ∞ 的交角与这两直线在第二交点(有限点)的交角大小相等、方向相反.

证 设两直线为 l_1,l_2.因为是研究在 ∞ 点的交角,所以考虑映射(变换)$w = 1/z$.

又设 l_1 与 l_2 在映射 $w = 1/z$ 下的像为 l_1' 与 l_2'.下面分情形讨论.

(1) l_1 与 l_2 都过原点,即交点为 $z_0 = 0$.在映射 $w = 1/z$ 下,l_1 与 l_2 映为过原点而与它们关于实轴对称的直线 l_1' 与 l_2'(见图 6.10).

若 l_1 与 l_2 在 $z = 0$ 的交角为 β,则 l_1' 与 l_2' 在原点 $w = 0$ 的交

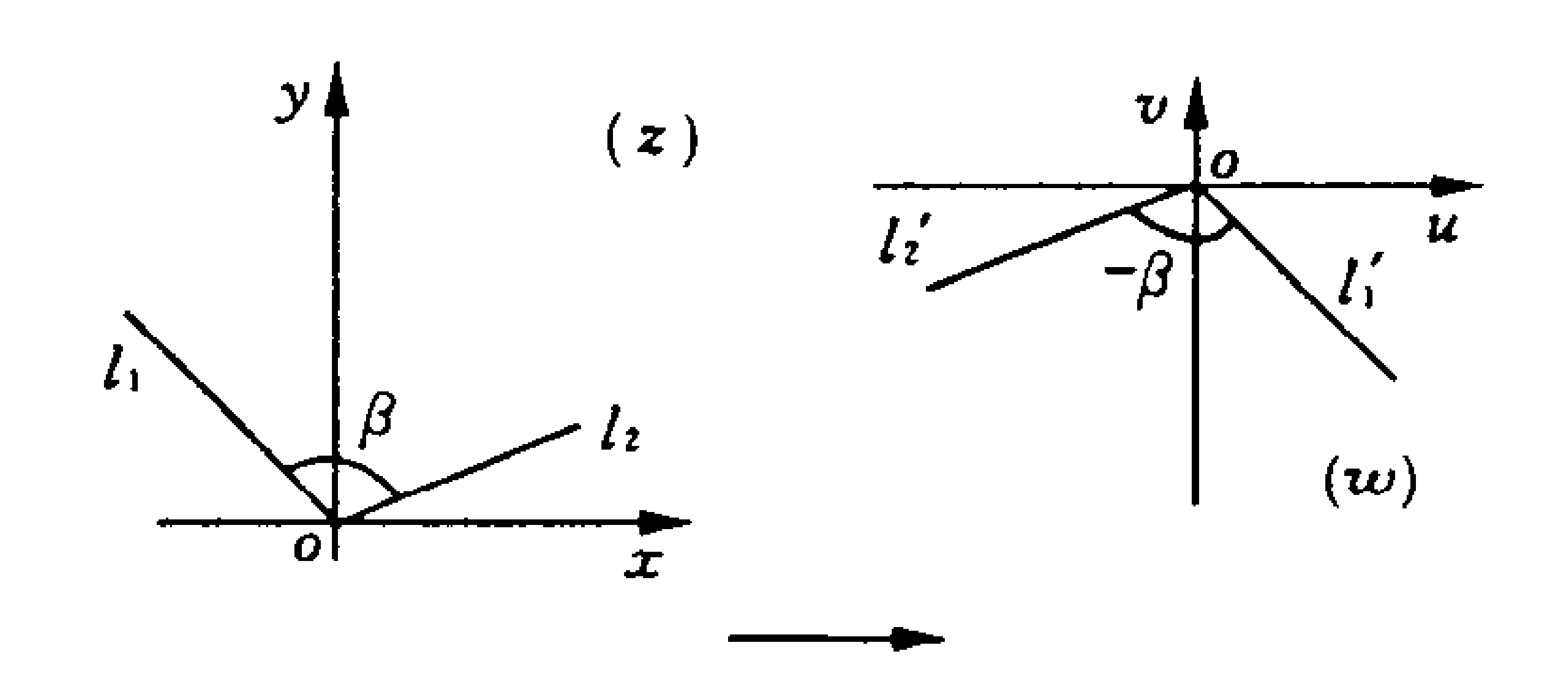


图 6.10

角为 $-\beta$. 因为两曲线在 ∞ 点的交角 θ 定义为在倒数映射下这两曲线的像曲线的交角 θ. 所以 l_1' 与 l_2' 在原点 $w=0$ 的交角正是 l_1 与 l_2 在无穷远点 ∞ 的交角. 从而知,交角确与 l_1 和 l_2 在第二交点的交角大小相等、方法相反.

(2) 设 $z_0 \neq 0$,此时 l_1 与 l_2 中至少一条不过原点. 则在映射 $w = 1/z$ 下,像 l_1' 与 l_2' 至少有一条映为圆弧.

因为 $z=\infty \to w=0, z=z_0 \to w=1/z_0$,所以若 l_1' 与 l_2' 在 $w=0$ 的交角记为 $-\beta$,则 l_1' 与 l_2' 的交角为 β. 而 l_1' 与 l_2' 在 $w=0$ 的交角 $-\beta$ 正是 l_1 与 l_2 在 $z=\infty$ 的交角. 由 $w=1/z$ 的保角性, l_1 与 l_2 在 z_0 的交角应等于 l_1' 与 l_2' 在 $1/z_0$ 的交角 β. 故 l_1 与 l_2 在 ∞ 的交角与 l_1 和 l_2 在第二交点的交角大小相等、方向相反.

图 6.11 所示的是 l_1,l_2 都不过原点情形,图 6.12 所示的是 l_1, l_2 有一条(l_1) 过原点情形.

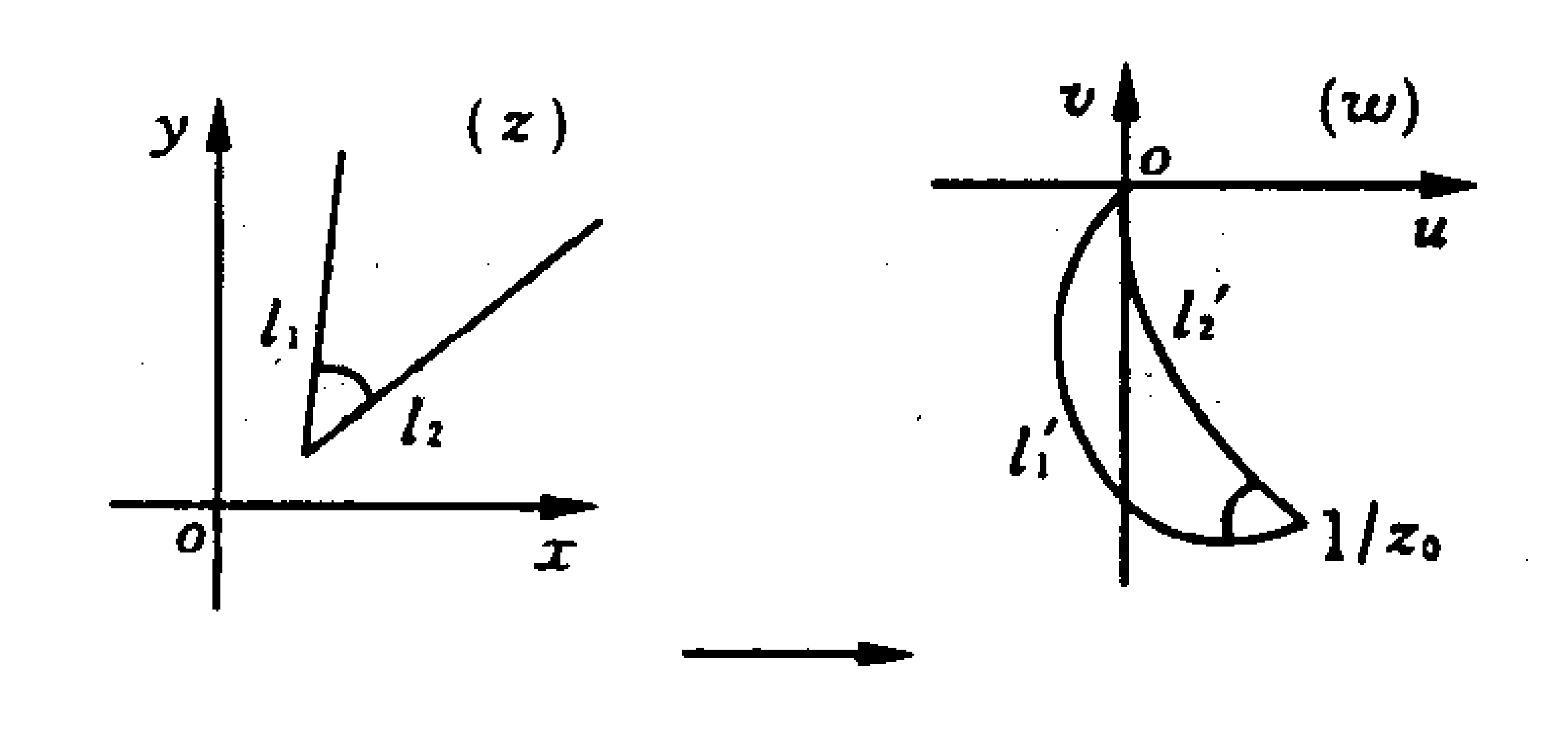


图 6.11

例 9 证明:任意四个相异的点 $z_k(k=1,2,3,4)$ 可用分式线性映射成 $1, -1, k, -k$ 的位置,此处的 k 值依点而定,共有多少

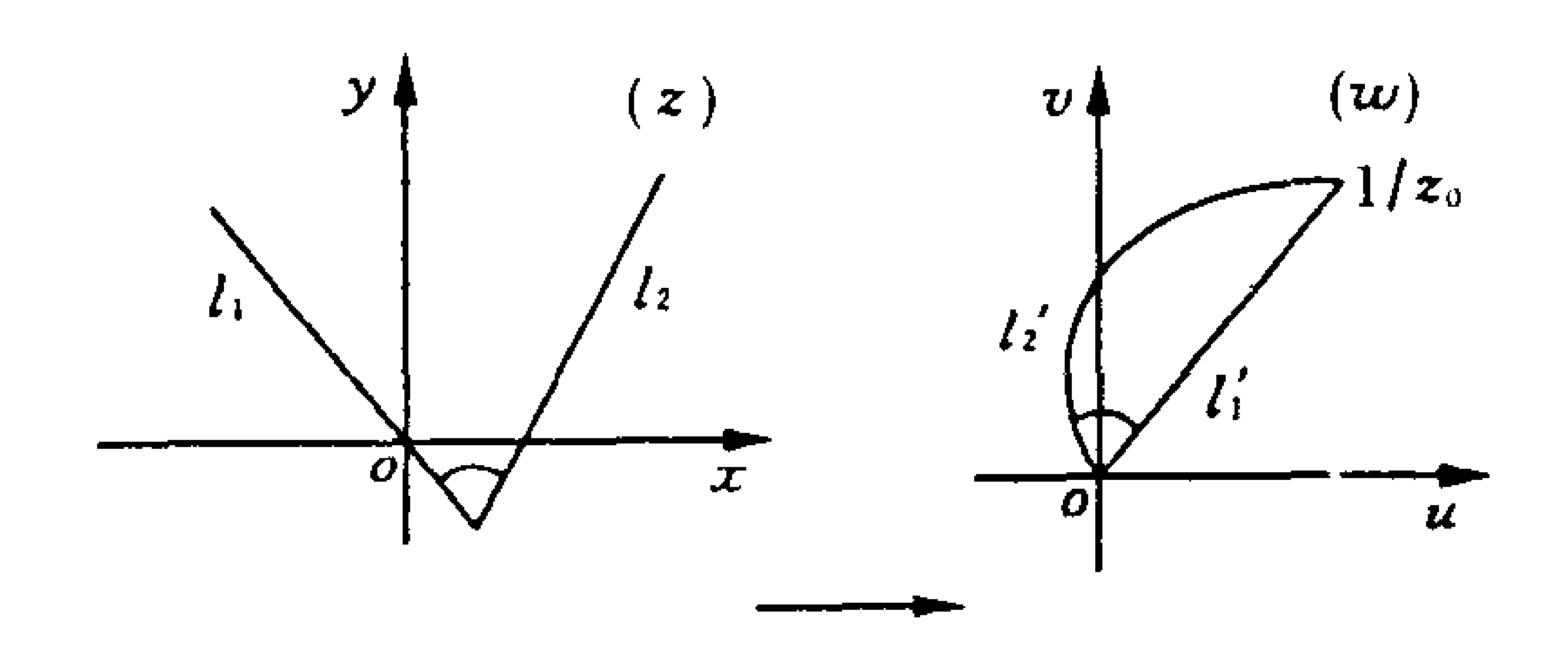


图 6.12

解?互相又有什么关系?

证 由交比不变性,设$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(1,-1,k,-k)\doteq A$,显然 A 随点 z_k 而定. 由

$$\frac{k-1}{k+1}:\frac{-k-1}{-k+1}=A\Longrightarrow k_{1,2}=\frac{1+A}{1-A}\pm\frac{2\sqrt{A}}{1-A}$$

可见 k 值依 A 而定,而且有两个解,满足

$$k_1\cdot k_2=\left(\frac{1+A}{1-A}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{A}}{1-A}\right)^2=1,$$

即 k_1 与 k_2 互为倒数关系.

例 10 证明:圆内接四边形对边乘积之和等于两对角线之积.

证 设圆内接四边形四个顶点为 z_1,z_2,z_3,z_4,要证明

$$|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_1-z_4|\cdot|z_2-z_3|$$
$$=|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|.$$

由第一章第一节例 38 知,若 z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆,则交比$(z_1,z_2,z_4,z_3)=\lambda$(实数,$0<\lambda<1$). 可以证明,互换点的位置时交点有不同变化. 因为$(z_1,z_4,z_2,z_3)=1-\lambda$,故

$$|(z_1,z_2,z_4,z_3)|+|(z_1,z_4,z_2,z_3)|=1,$$

即 $$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\cdot\frac{z_4-z_3}{z_4-z_2}\right|+\left|\frac{z_1-z_4}{z_1-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right|=1,$$

去分母,得

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_4 - z_3| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|$$
$$= |z - z_3||z_2 - z_1|.$$

二、分式线性映射的确定与映射的图形

分式线性映射是共形映射的一种，它的研究也分两类问题.

第一类问题是：已知 z 平面上的区域(或点、圆弧)和分式线性映射 $w=f(z)$，求 $w=f(z)$ 映射下 D 的像域 G. 解决这一类问题的方法是，求出区域 D 的边界(或点、圆弧)的像，然后再由绕向确定像域. 一般方法可以归纳为口诀：

由区域求边界，依函数求图像，边界绕向定区域.

解决这一类问题的关键是要熟悉圆弧、直线在不同情况下的对应关系，以及 D 的边界 C 的内部对应区域确定的法则(内点确定法或绕向确定法).

第二类问题是：已知 z 平面上区域 D 和 w 平面上区域 G，找到将 D 映为 G 的分式线性映射 $w=f(z)$. 这类问题比较复杂，它要依据 D 与 G 的形状与关系，找出反映两个区域间关系的函数. 一般都不能用一个简单函数表示，而要从两头考虑，利用我们熟知的典型变换作跳板，最后联系起来，利用复合关系求得函数. 一般方法可以归纳为口诀：

看两头想中间，典型映射来过渡，联系起来求函数.

例 11 若分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$，求把 z 平面上三圆弧所围成三角形映为 w 平面上的直线三角形的充分必要条件.

解 如图 6.13 所示若映射将 z 平面上三圆弧映为三直线，则由三直线都过点 ∞ 可知，对应的三圆弧上都有一点映为 ∞ 点. 由一一对应性，这点是三圆弧的交点.

由 $\infty=\dfrac{az+b}{cz+d}\Rightarrow cz+d=0\Rightarrow z=-\dfrac{d}{c}$. 所以 z 平面上三圆弧交于点 $z=-\dfrac{d}{c}$ 是必要条件.

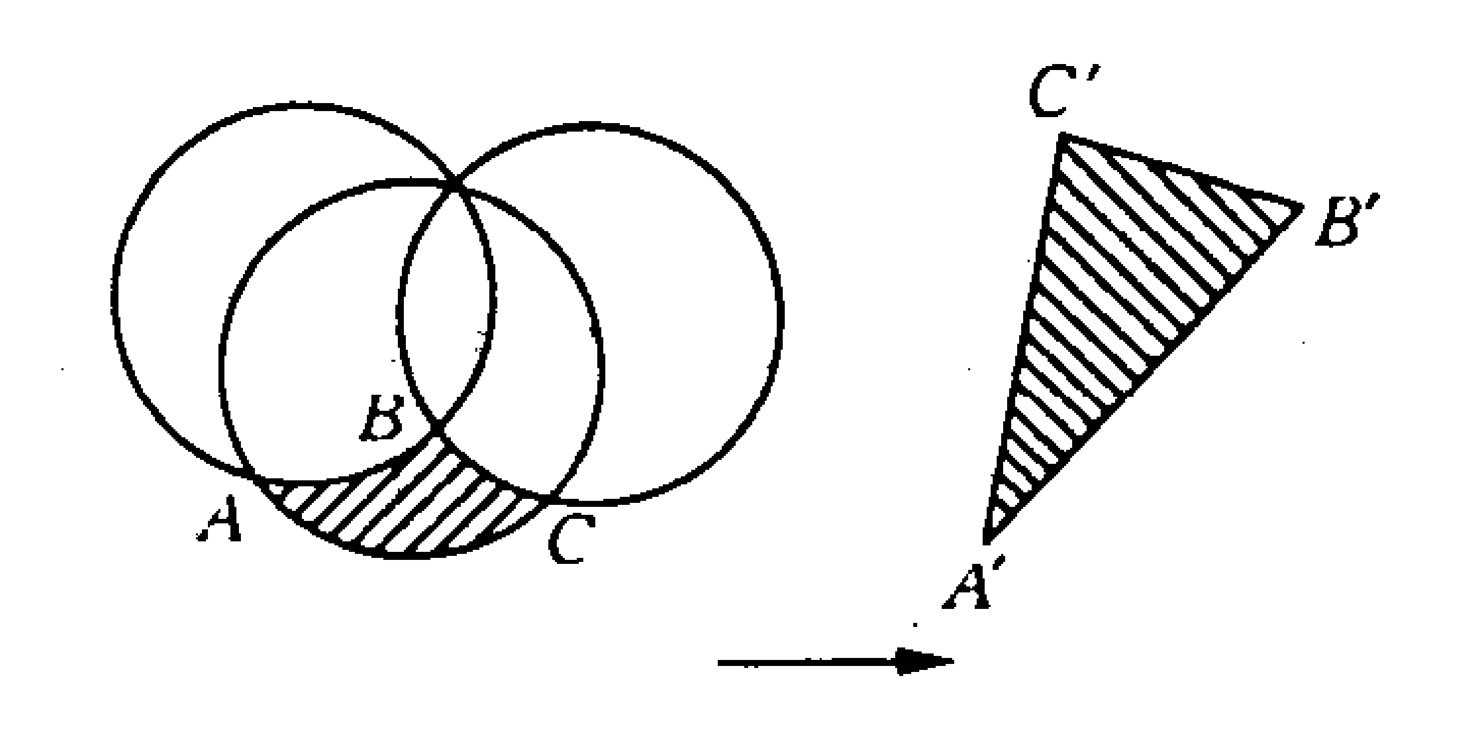


图 6.13

又若三圆弧交于一点 $z=-\dfrac{d}{c}$，则由分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的保圆性知，三圆弧映为三圆弧，但 $z=-\dfrac{d}{c}$ 映为 $w=\infty$，所以对应的三圆弧半径为无穷大，即映为三直线.

故确知，分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将三圆弧映为三直线的充分必要条件是：z 平面上的三圆弧交于点 $z=-\dfrac{d}{c}$.

例 12 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，三个互相外切的圆周（有一个切点在原点 $z=0$）所围成的区域映为什么区域？

解 如图 6.14 所示，$w=\dfrac{1}{z}$ 是分式线性映射 $a=d=0, b=c=1$，所以具有保圆性，将 $\overset{\frown}{oa}, \overset{\frown}{ob}$ 映为过 ∞ 的直线，即射线 $o'a'$ 和 $o'b'$. $\overset{\frown}{ab}$ 映为 $\overset{\frown}{a'b'}$.

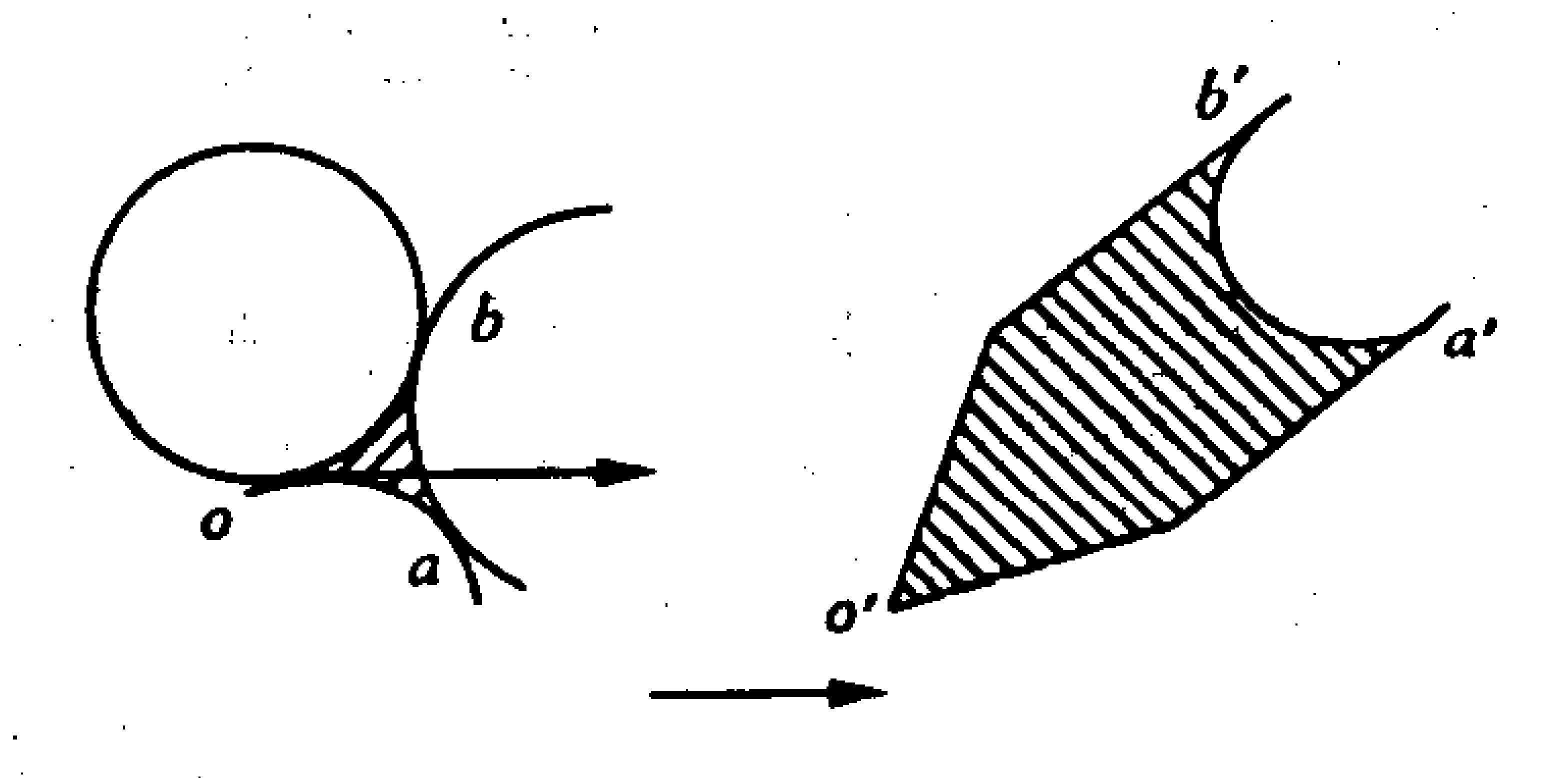


图 6.14

又 $w=\frac{1}{z}$ 具有保角性，所以 $\widehat{a'b'}$ 与射线 $o'a'$，$o'b'$ 相切，且无有限交点. 即 $\widehat{a'b'}$ 为半圆周，$o'a'$ 和 $o'b'$ 相互平行.

在 $w=\frac{1}{z}$ 下，三个互相外切的圆弧所围的曲边三角形 oab 映为两平行射线 $o'a'$，$o'b'$ 和半圆周 $\widehat{a'b'}$ 所围成的区域.

例 13 分式线性映射 $w=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ 将角形域 $D:\mathrm{Im}(z)>0\cap\mathrm{Re}(z)>0$ 映为什么区域？

解 如图 6.15 所示，D 即 z 平面上第一象限，D 的边界为正实轴和上半虚轴.

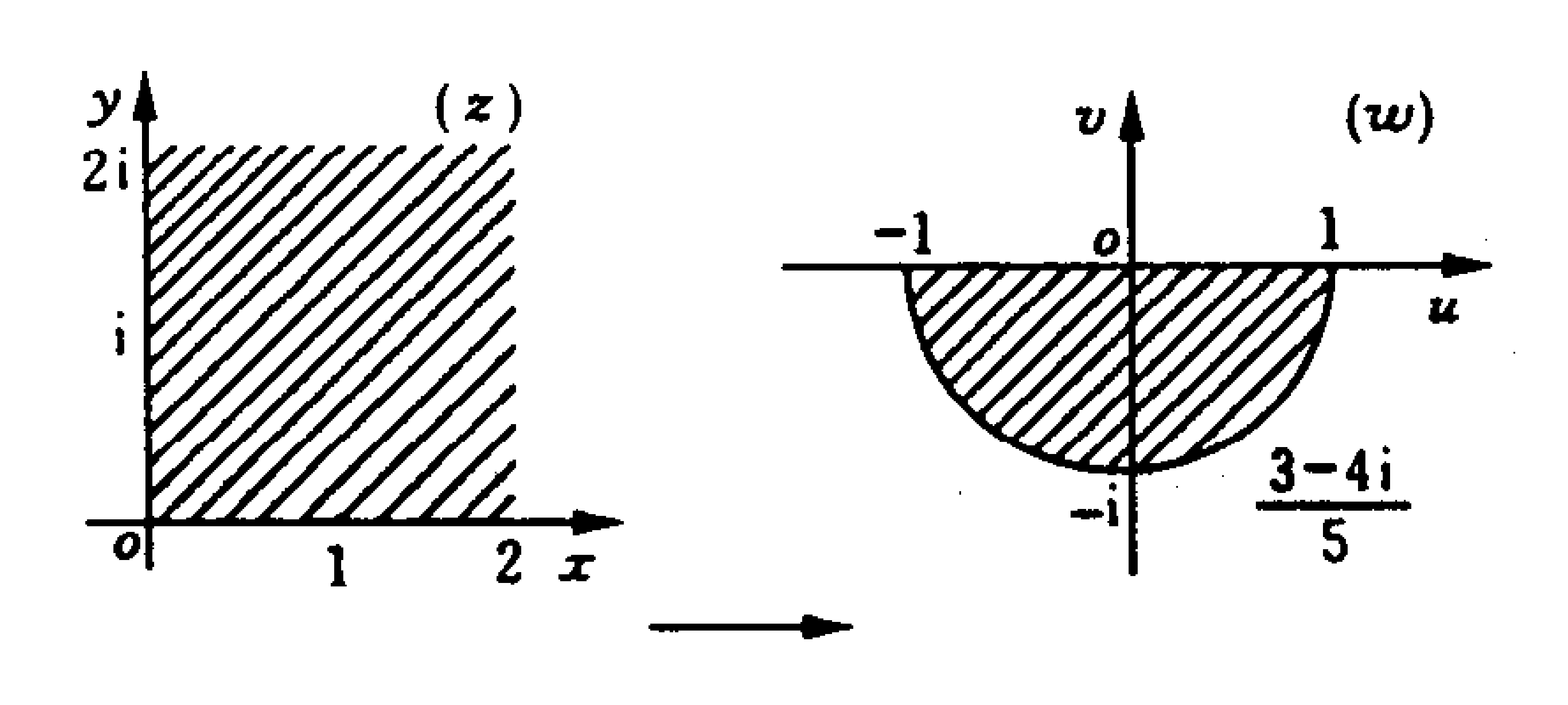


图 6.15

先求出 D 的边界的像. 在上半虚轴取三点 o，i，2i，分别映为 -1，0，1/3；当 $z=\infty$ 时，$w=1$. 所以上半虚轴映为 w 平面 u 轴上区间 $[-1,1]$.

再在正实轴上取三点 0，1，2，分别被映为 w 平面上 -1，$-\mathrm{i}$，$(3-4\mathrm{i})/5$；当 $z=x=\infty$ 时，$w=1$，而点 -1，$-\mathrm{i}$，$(3-4\mathrm{i})/5$ 的模均为 1.

由分形线性映射的共形性与保圆性，依边界绕向知，z 平面上第一象限映为 w 平面上的下半个单位圆内部：

$$|w|<1,\quad \mathrm{Im}(w)<0.$$

例 14 证明：$w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)=0$ 的充要条件是 a,b,c,d 为实数.

证 已知 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$.

充分性 在 $\mathrm{Im}(z)=0$ 上取三点 $0,1,\infty$，经分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 映成 $\dfrac{b}{d},\dfrac{a+b}{c+d},\dfrac{a}{c}$. 当 a,b,c,d 为实数时，$w_1=\dfrac{b}{d}, w_2=\dfrac{a+b}{c+d}, w_3=\dfrac{a}{c}$ 在 $\mathrm{Im}(w)=0$ 上，所以 $\mathrm{Im}(z)=0$ 被映为 $\mathrm{Im}(w)=0$.

必要性 设 w_1,w_2,w_3 为实数. 若 $d=0$，则 $c\neq 0$，于是，由 $w_1=\dfrac{b}{d}, w_2=\dfrac{a+b}{c+d}, w_3=\dfrac{a}{c}$ 知

$$a=cw_3,\ b=cw_2-a=c(w_2-w_3),$$

$$w=\frac{az+b}{cz}=\frac{cw_3z+c(w_2-w_3)}{cz}=\frac{w_3z+w_2-w_3}{z}.$$

进行比较知，$w_3=a, w_2=w_3+b=a+b, c=1, d=0$，即 a,b,c,d 为实数.

若 $d\neq 0$，则 $b=dw_1, a=cw_3, a+b=(c+d)w_2$. 设 $c\neq 0$，有

$$cw_3+dw_1=(c+d)w_2 \Rightarrow c=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_2}d=kd,$$

其中 $k=\dfrac{w_2-w_1}{w_3-w_2}$ 为实数，于是

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{kdw_3z+dw_1}{kdz+d}=\frac{kw_3z+w_1}{kz+1}.$$

进行比较知，$a=kw_3, b=w_1, c=k, d=1$ 均为实数.

$c=0$ 时，可仿照 $d=0$ 证出.

综上所述知，$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)=0$ 的充要条件是 a,b,c,d 全是实数.

例 15 下列区域在指定映射下映为什么?

(1) $\mathrm{Re}(z)>0, w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$;

(2) $\mathrm{Im}(z)>0, w=(1+\mathrm{i})z$;

(3) $0 < \mathrm{Im}(z) < \frac{1}{2}, w = \frac{1}{z}$;

(4) $\mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) > 0, w = \frac{1}{z}$;

(5) $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1, w = \frac{\mathrm{i}}{z}$.

解　题中各映射都是分式线性映射的特殊情形,因此具有分式线性映射的一切性质.

(1) $\mathrm{Re}(z) > 0$,即右半平面 $x > 0$. 由

$$w = \mathrm{i}z + \mathrm{i} = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i} = -y + (x + 1)\mathrm{i}$$

知 $$\mathrm{Im}(w) = x + 1 > 1\text{(见图 6.16(a))}.$$

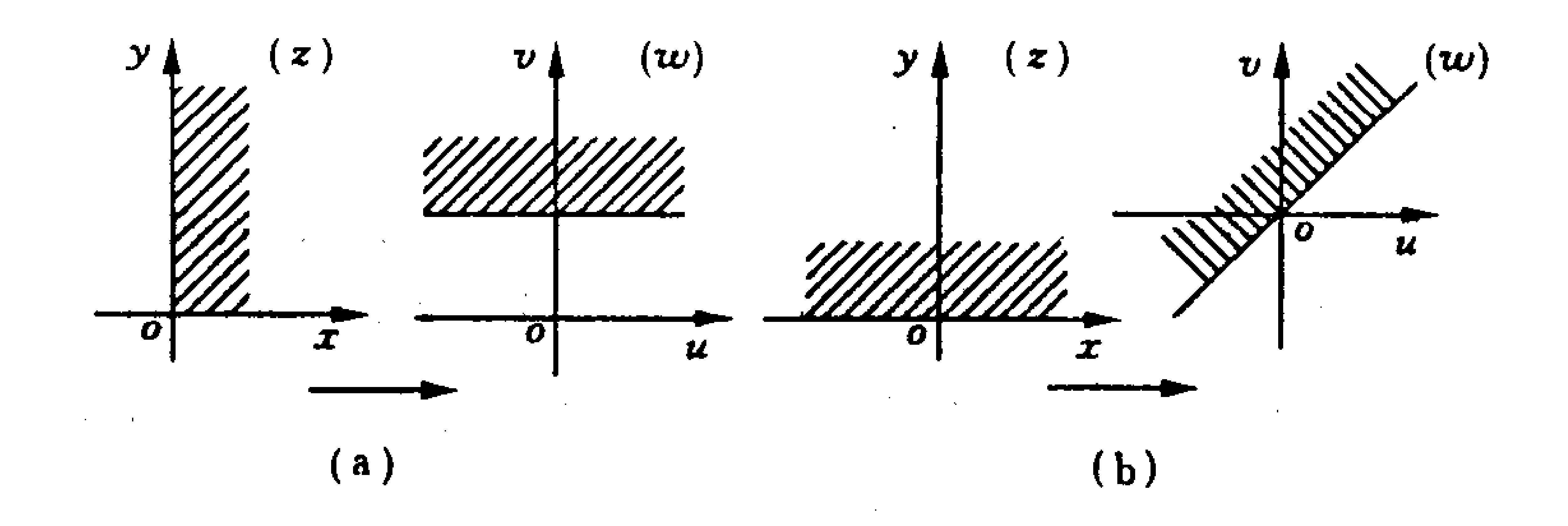


图 6.16

(2) $\mathrm{Im}(z) > 0$,即上半平面 $y > 0$. 由

$$w = (1 + \mathrm{i})z = (1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (x - y) + \mathrm{i}(x + y)$$

知 $\mathrm{Im}(w) > \mathrm{Re}(w)$(见图 6.16(b)).

(3) $0 < \mathrm{Im}(z) < \frac{1}{2}$,即 $0 < y < \frac{1}{2}$,是带形域. 由

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} \Rightarrow \mathrm{Im}(w) < 0.$$

在 $z = \frac{\mathrm{i}}{2}$ 上取三点 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,依次映为 w 平面上 $(0,0), (0, -2), (1, -1)$,恰为 $|z - \mathrm{i}| = 1$ 上三点,而 $y = 0$ 映为 w 平面上除原点外的实轴. 依 $-\infty \to 0 \to \frac{1}{2}$ 绕向对应

w 平面上三点绕向知，带形域对应圆外域 $\mathrm{Im}(w) < 0, |z+\mathrm{i}| > 1$(见图 6.17(a)).

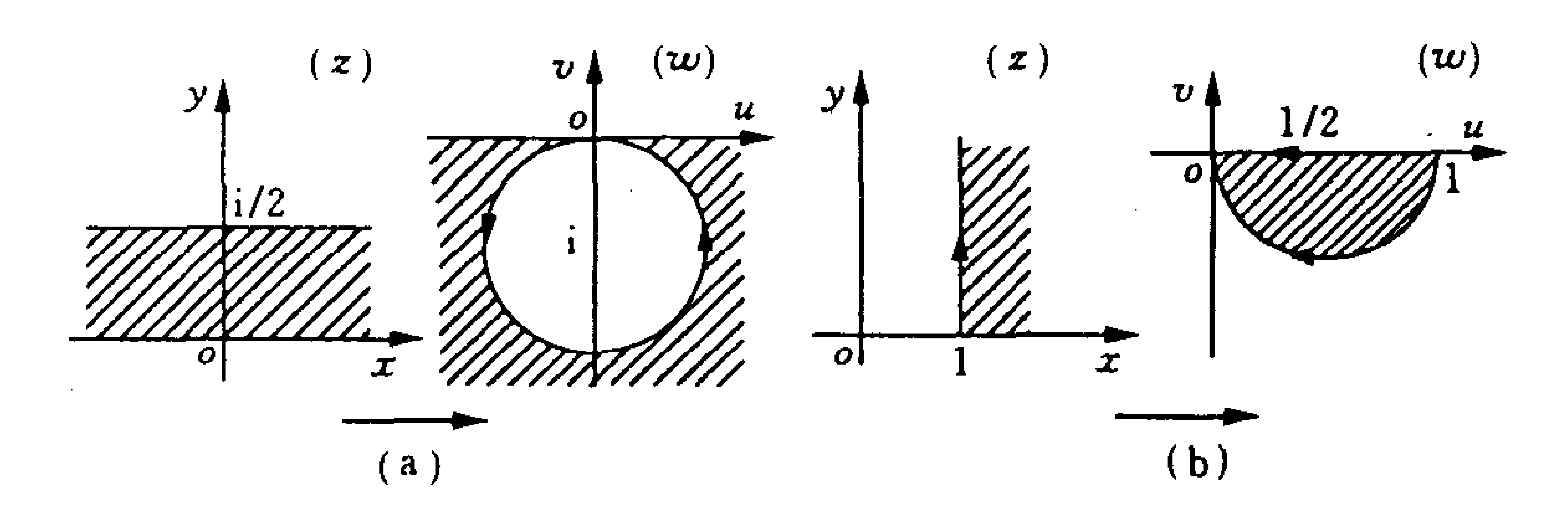


图 6.17

(4) $\mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) > 0$，即 $x > 1, y > 0$. 有

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \mathrm{Im}(w) < 0, \quad \mathrm{Re}(w) > 0,$$

又 z 平面上点 $(1,0),(1,\infty)$ 映为 w 平面上 $(1,0),(0,0)$，即射线 $x = 1\ (\mathrm{Im}z > 0)$ 映为 w 平面实轴上区间 $[0,1]$. 又 z 平面上点 $(1,1)$ 映为 1 平面上点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，点 $(0,0)$，$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$(1,0)$ 均为圆 $\left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 上点. 依绕向知映为半圆 $\left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(w) < 0$ 内域(见图 6.17(b)).

(5) $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1$，即 $x > 0, 0 < y < 1$，是半带形域，有

$$w = \frac{\mathrm{i}}{z} = \frac{y + \mathrm{i}x}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \mathrm{Re}(w) > 0, \quad \mathrm{Im}(w) > 0.$$

又 z 平面上实轴映为 w 平面上半虚轴；z 平面上直线 $y=\mathrm{i}$ 上点 $(0,1),(1,1),(\infty,1)$ 依次映为 w 平面上半圆周 $|w-1| = \frac{1}{2}$ 上点 $(1,0)$，$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$(0,0)$. z 平面虚轴上区间 $[\mathrm{i},0]$ 映为 w 平面实轴上区间 $[1,\infty)$. 依绕向确定区域为

$$\mathrm{Im}(w) > 0, \quad \mathrm{Re}(w) > 0, \quad \left|w - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}(\text{见图 } 6.18).$$

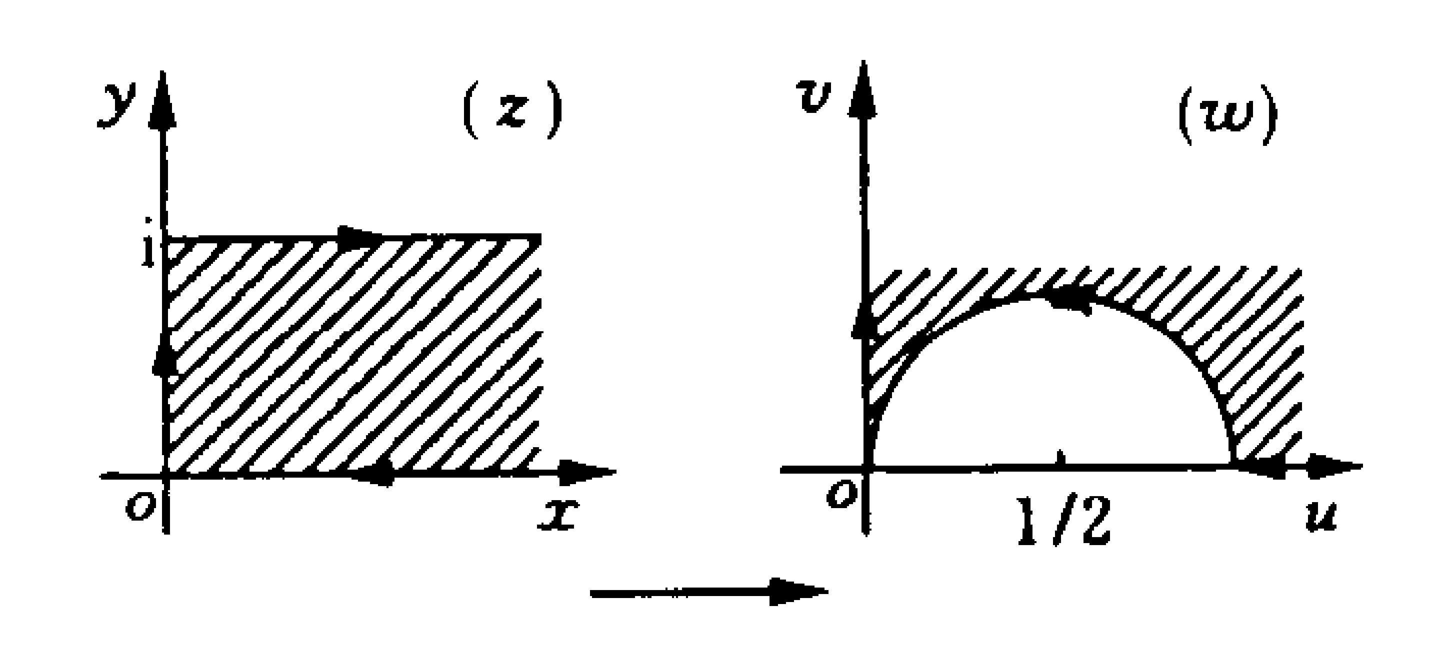


图 6.18

例 16 若分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为：

(1) 上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$； (2) 下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$，

则其系数应满足什么条件？

解 将实轴映为实轴的分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，应有 a，b，c，d 为实数(见例 14)。

因为 $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，可以得出：

(1) 当 $ad-bc>0$ 时，$w'>0$，由绕向(当 z_k 沿渐增方向在实轴上前进时，w_k 也由渐增方向在实轴上前进)相同，知 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)>0$.

(2) 当 $ad-bc<0$ 时，$w'<0$，由绕向相反知，$\mathrm{Im}(z)>0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)<0$.

例 17 若分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 z 平面上直线映为 w 平面上单位圆，则其系数应满足什么条件？

解 若 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将直线映为单位圆，则 $z=\infty$ 映为 $|w|=1$ 上点，即

$$|w|=\left|\frac{a\infty+b}{c\infty+d}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|=1\Rightarrow |a|=|c|,$$

故系数应满足 $ad-bc\neq 0$ 且 $|a|=|c|$.

例 18 确定下列集合在映射 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 下的像.

(1) $z=1$； (2) $z=-1$； (3) $\mathrm{Re}(z)=0$；

(4) $|z|=2$； (5) $\mathrm{Im}(z)>0$.

解 (1) $z=1$ 是一点，代入知，映为点 $w=0$.

(2) $z=-1$ 是一点，代入知，映为点 $w=\infty$.

(3) $\mathrm{Re}(z)=0$ 是虚轴，即 $z=\mathrm{i}y$. 代入得

$$w=\frac{\mathrm{i}y-1}{\mathrm{i}y+1}=\frac{-(1-\mathrm{i}y)^2}{1+y^2}=\frac{-1+y^2}{1+y^2}+\mathrm{i}\frac{2y}{1+y^2}\quad(-\infty<y<+\infty),$$

写成参数方程为

$$u=\frac{-1+y^2}{1+y^2},\quad v=\frac{2y}{1+y^2},\quad -\infty<y<+\infty.$$

消去 y 得，像曲线方程为单位圆，即

$$u^2+v^2=1\quad\left(\text{也可由 }|w|=\left|\frac{\mathrm{i}y-1}{\mathrm{i}y+1}\right|=1\text{ 得出}\right).$$

(4) $|z|=2$ 是一圆周，令 $z=2e^{\mathrm{i}\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 代入得 $w=\dfrac{2e^{\mathrm{i}\theta}-1}{2e^{\mathrm{i}\theta}+1}$，化为参数方程

$$u=\frac{3}{5+4\cos\theta},\quad v=\frac{4\sin\theta}{5+4\cos\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,$$

消去 θ 得，像曲线方程为一阿波罗尼斯圆，即

$$\left(u-\frac{5}{3}\right)^2+v^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

（也可由 $w=\dfrac{z-1}{z+1}\Rightarrow\dfrac{w+1}{w-1}=-z$，得 $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=|-z|=2$）.

(5) 当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时，由 $\dfrac{w+1}{w-1}=-z\Rightarrow\mathrm{Im}\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)<0$. 令 $w=u+\mathrm{i}v$，得

$$\mathrm{Im}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(u+1)+\mathrm{i}v}{(u-1)+\mathrm{i}v}\right)=\frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}<0,$$

即 $v>0$，故 $\mathrm{Im}(z)>0$ 的像为 $\mathrm{Im}(w)>0$.

例 19 试求将 $|z|<1$ 映为 $|w-1|<1$ 的分式线性映射.

解 已知将 $|z|<1$ 映为圆 $|w_1|<1$ 的分式线性映射为

$$w_1 = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}},\quad |\alpha|<1.$$

将 $|w_1|<1$ 向右平移一个单位,即 $|w-1|<1$.

故 $w = 1 + w_1 = 1 + e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}}, |a|<1.$

例 20 求将圆域 $|z|<R$ 映成 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解 先作伸缩映射 $w_1 = \dfrac{z}{R}$,将 $|z|<R$ 映为 $|w_1|<1$;再将 $|w_1|<1$ 映为 $|w|<1$,于是

$$w = e^{i\theta}\frac{w_1-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,w_1} = e^{i\theta}\frac{z/R-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,z/R} = e^{i\theta}\frac{z-\alpha R}{R-\overline{\alpha}\,z},\quad |\alpha|<1$$

即为所求映射.

例 21 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$,并满足条件

(1) $f(i)=0, f(-1)=1$; (2) $f(i)=0, \arg f'(i)=0$;

(3) $f(1)=1, f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

解 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为单位圆 $|w|<1$ 的一般分式线性映为 $w=k\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \mathrm{Im}(\alpha)>0$.

(1) 由 $f(i)=0$,得 $i-\alpha=0$,即 $\alpha=i$;又由 $f(-1)=1$,得 $k\dfrac{-1-i}{-1+i}=1$,即 $k=-i$;所以

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}.$$

(2) 由 $f(i)=0$,得 $\alpha=i$;又由 $\arg f'(i)=0$,即 $f'(z)=e^{i\theta}\dfrac{2i}{(z+i)^2}, f'(i)=\dfrac{1}{2}e^{i(\theta-\pi/2)}=0$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. 所以

$$w=i\frac{z-i}{z+i}\quad (k=e^{i\theta}).$$

(3) 由 $f(1)=1$，得 $k=\dfrac{1-\bar{\alpha}}{1-\alpha}$；由 $f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，得 $k=\dfrac{\mathrm{i}-\bar{\alpha}}{\sqrt{5}(\mathrm{i}-\alpha)}$. 联立解得(过程略，请读者自己尝试)

$$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2\mathrm{i})}{(\sqrt{5}-2\mathrm{i})z+3}.$$

提示：令 $\alpha=x+\mathrm{i}y,\bar{\alpha}=x-\mathrm{i}y$，解方程得 $x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3},y=\dfrac{2}{3}$.

例 22 求将 $|z|<1$ 映成 $|w|<1$ 的分式线性映射，且满足条件

(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,f(-1)=1$；

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

解 将单位圆 $|z|<1$ 映为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射为 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},|\alpha|<1$.

(1) 由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，知 $\alpha=\dfrac{1}{2}$. 又由 $f(-1)=1$，知

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{-1-1/2}{1+1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-1)=1\Longrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-1\Longrightarrow\theta=\pi,$$

故
$$w=-1\cdot\frac{z-1/2}{1-z/2}=\frac{2z-1}{z-2}.$$

(2) 由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，知 $\alpha=\dfrac{1}{2}$. 又 $w'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{5-4z}{(2-z)^2}$(由 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-1/z}{1-z/2}$ 求导)，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{4}{3}\Longrightarrow\theta=\arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，于是

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\left(\frac{z-1/2}{1-z/2}\right)=\mathrm{i}\,\frac{2z-1}{2-z}.$$

例 23 求将 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$，且满足条件 $f(a)=a$，$\arg f'(a)=\theta$ 的分式线性映射(见图 6.19).

解 这个映射不能直接求得，需用从两头向中间靠拢的“过渡”方式来求.

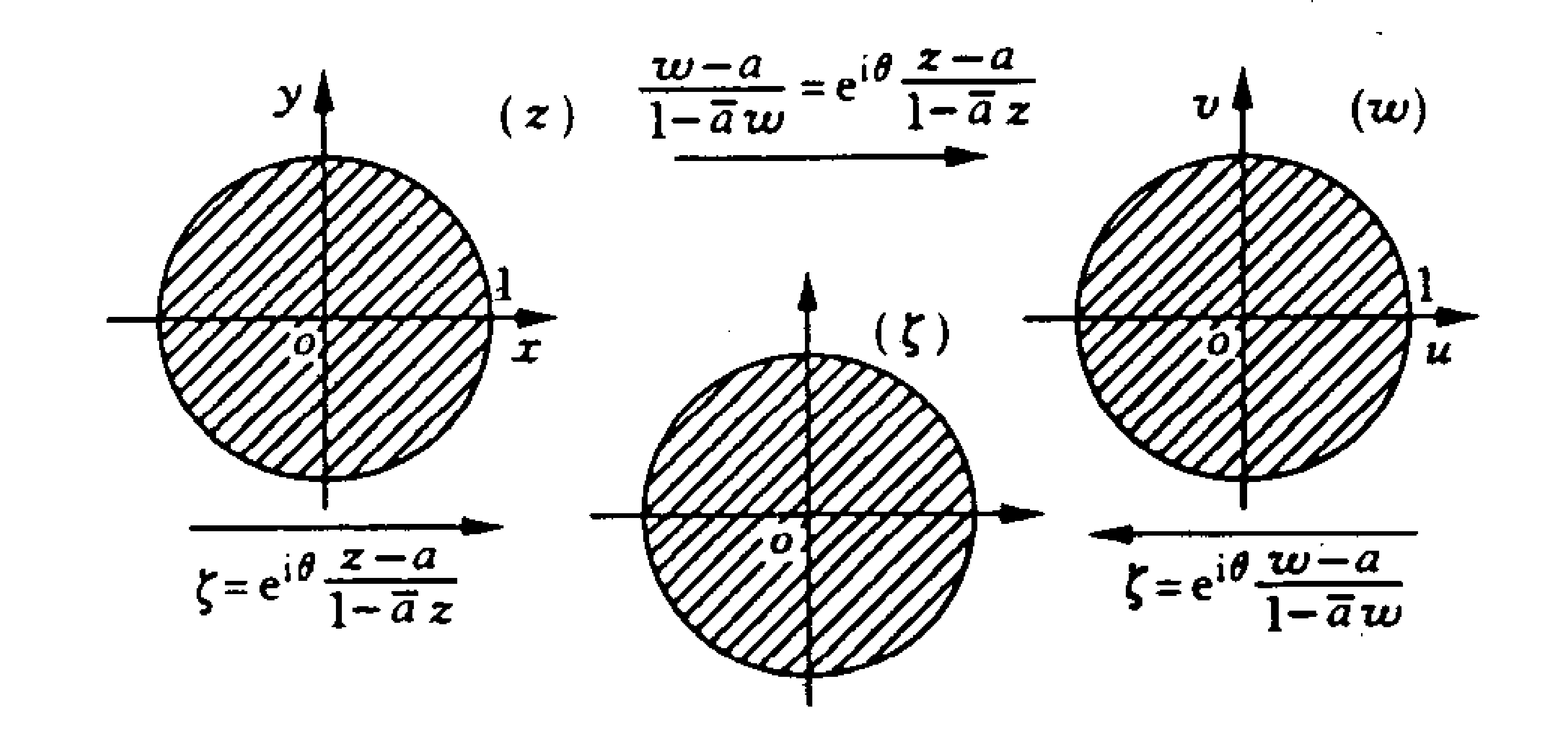


图 6.19

(1) 先求 $\zeta=\varphi(z)$，使 $z=a\to\zeta=0$，$\arg\varphi'(a)=\theta$，且 $|z|<1$ 映为 $|\zeta|<1$. 则由上例可知

$$\zeta=\varphi(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(2) 再求 $w=g(\zeta)$，使 $\zeta=0\to w=a$，$\arg g'(0)=0$，且 $|\zeta|<1$ 映为 $|w|<1$. 先求其反函数 $\zeta=\psi(w)$，它使 $|w|<1$ 映为 $|\zeta|<1$，$w=a$ 映为 $\zeta=0$，且 $\arg\psi'(w)=\arg(1/g'(0))=0$. 则由上例可知

$$\zeta=\psi(w)=\frac{w-a}{1-\bar{a}w}.$$

因此，所求 w 由等式给出

$$\frac{w-a}{1-\bar{a}w}=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

例 24 求将 $\mathrm{Im}(z)>0$，映到 $\mathrm{Im}(w)<0$、且把 z 平面上的线段 $(-1,1)$ 映为 w 平面上的射线 $(0,+\infty)$ 的分式线性映射.

解 设映射为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc<0$，a,b,c,d 为实数.

由 $z=-1\to w=\infty$，$z=1\to w=0$ 可得 $-c+d=0$，$a+b=0$，所以，取 $a=1$，$b=-1$，$c=1$，$d=1$. 即

$$w=k\frac{z-1}{z+1},\quad k<0.$$

例 25 求把 $\mathrm{Im}(z)>0$ 除去圆弧 $|z|=1,0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 所得区域映为 $\mathrm{Im}(w)>0$ 除去直线段 $\mathrm{Re}(w)=0,0<\mathrm{Im}(w)\leqslant 1$ 所得区域的映射(见图 6.20).

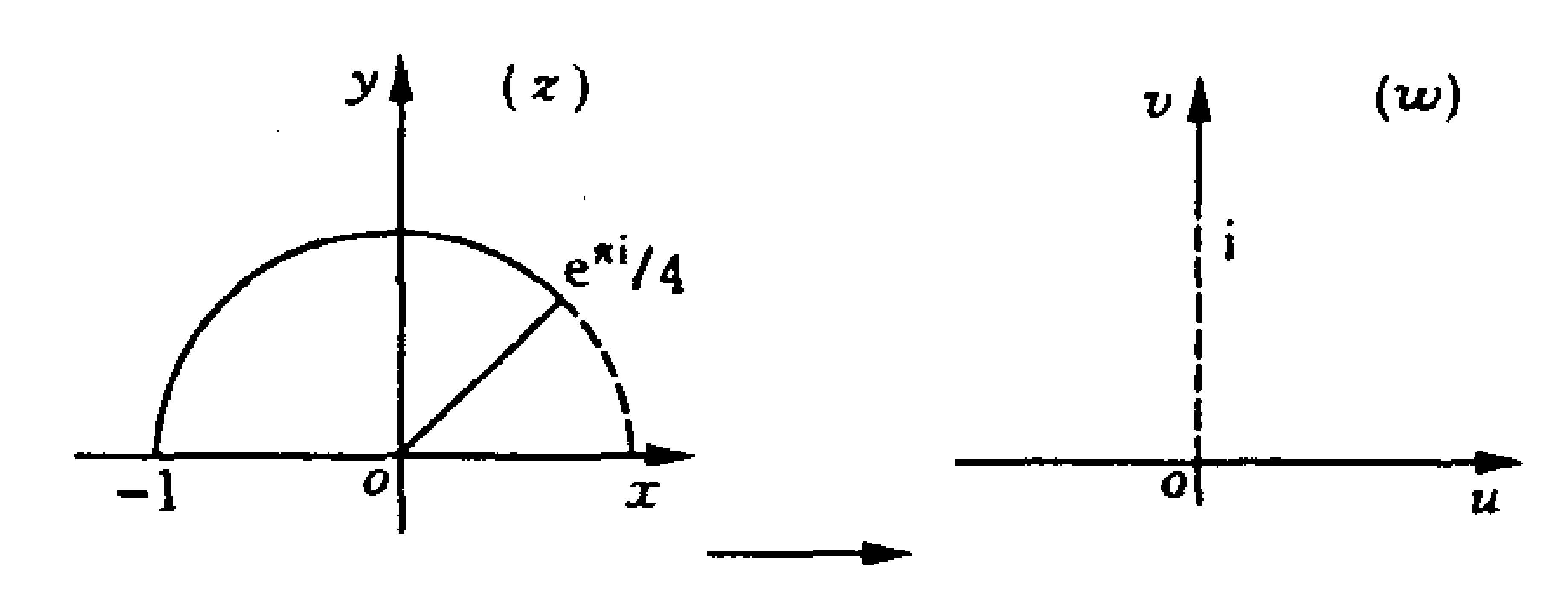


图 6.20

解 由分式线性映射的保圆性,只要求做到

$$z=1\rightarrow w=0,\ z=e^{i\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\rightarrow w=i,$$

$$z=-1\rightarrow w=\infty.$$

所以
$$w=k\frac{z-1}{z+1}.$$

由
$$i=k\frac{(1+i)/\sqrt{2}-1}{(1+i)/\sqrt{2}+1}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}-1},$$

故
$$w=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{z-1}{z+1}.$$

例 26 求所有使点 ± 1 不动(即 $z=\pm 1\rightarrow w=\pm 1$) 的分式线性映射.

解 设所求分式线性变换为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$. 由 $-1\rightarrow -1$,得

$$-1=\frac{-a+b}{-c+d}\Rightarrow b=a+c-d.$$

因为
$$w=\frac{a(z+1)+c-d}{cz+d},$$

即
$$w+1=\frac{a(z+1)+c(z+1)}{cz+d},$$

由 $1\to 1$ 代入上式，得

$$2=2\frac{a+c}{c+d}\Rightarrow a=d,$$

因此 $$w+1=(z+1)\frac{d+c}{cz+d}=(z+1)\frac{1+d/c}{z+d/c}.$$

令 $\frac{d}{c}=q$，得

$$\frac{w+1}{w-1}=\frac{(z+1)(1+q)/(z+q)}{(z+1)(1+q)/(z+q)-2}$$

$$=\frac{(z+1)(1+q)}{(z-1)(q-1)}=\alpha\frac{z+1}{z-1},$$

其中 α 为复数.

反之也成立. 故所求分式线性映射为

$$\frac{w+1}{w-1}=\alpha\frac{z+1}{z-1},\quad \alpha\text{ 为复数}.$$

例 27 求使点 $-1,\mathrm{i},1+\mathrm{i}$ 映为下列点的分式线性映射：

(1) $0,2\mathrm{i},1-\mathrm{i}$； (2) $\mathrm{i},\infty,1$.

解 直接用交比不变性公式即可求得.

(1) 由 $$\frac{w-0}{w-2\mathrm{i}}:\frac{1-\mathrm{i}-0}{1-\mathrm{i}-2\mathrm{i}}=\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}:\frac{1+\mathrm{i}+1}{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}},$$

得 $$\frac{1-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}\cdot\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{w}{w-2\mathrm{i}}(2+\mathrm{i}),$$

所以 $$w=\frac{(1+\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}{-2(1-\mathrm{i})z+(2\mathrm{i}+3)}=\frac{2(z+1)}{4\mathrm{i}z+5-\mathrm{i}}.$$

(2) 由 $$\frac{w-\mathrm{i}}{w-1}=\frac{z+1}{z-(1+\mathrm{i})}:\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})},$$

得 $$\frac{z+1}{z-(1+\mathrm{i})}=\frac{w-\mathrm{i}}{w-1}(-1-\mathrm{i}).$$

所以 $$w=\frac{\mathrm{i}z+3}{(2+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}.$$

例 28 将点 $z=1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$ 顺次映为 $w=1,0,-1$ 的分式线性映射将单位圆 $|z|<1$ 映为什么？求出这个映射(见图 6.21).

解 由交比不变性，知

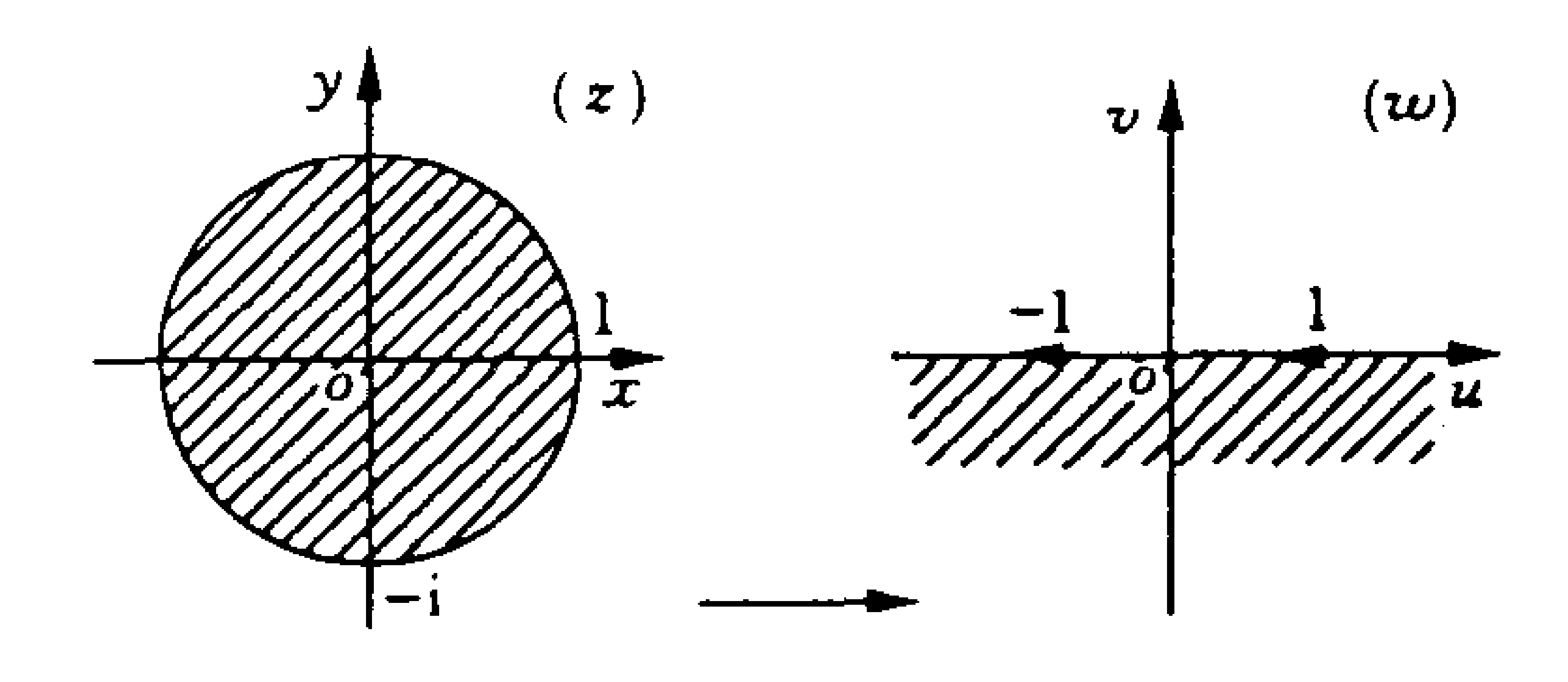


图 6.21

$$\frac{w-1}{w-0}\cdot\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}-1},$$

得分式线性映射为 $w=\dfrac{(1+\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}{(1+z)+3\mathrm{i}(1-z)}$.

由于 $z=1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$ 为圆周 $|z|=1$ 上的点，$w=1,0,-1$ 是实轴 u 上的点，依边界绕向对应关系，$|z|<1$ 映为 w 平面的下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$.

例 29 求将 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映为 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解 设 z 平面上一点 α 映为 $w=0$，虚轴映为 $|w|=1$ 的四周，α 的对称点 $\overline{\alpha}$ 映为 $w=\infty$. 于是，分式线性映射的形式应为

$$w=k\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}.$$

当 z 取虚轴上点时，对应点在 $|w|=1$ 上. 不妨取 $z=0$，则

$$|w|=|k|\cdot\left|\frac{0-\alpha}{0+\overline{\alpha}}\right|=|k|\cdot\left|\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\right|=1\Rightarrow k=1,$$

所以，令 $k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\theta\in\mathbf{R})$，故 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}\quad(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$.

例 30 求将 $|z-2|>1$ 和 $|z+2|>1$ 映为同心圆环 $1<|w|<\rho$ 的分式线性映射，并求 ρ(见图 6.22).

解 设 z 平面上点 $z=3,1,-1,-3$ 依次对应映为 $w=1,-1,-\rho,\rho$，由交比不变性，得

$$\frac{-3-3}{-3-1}:\frac{-1-3}{-1-1}=\frac{\rho-1}{\rho+1}:\frac{-\rho-1}{-\rho+1}\Rightarrow\rho=7+4\sqrt{3}.$$

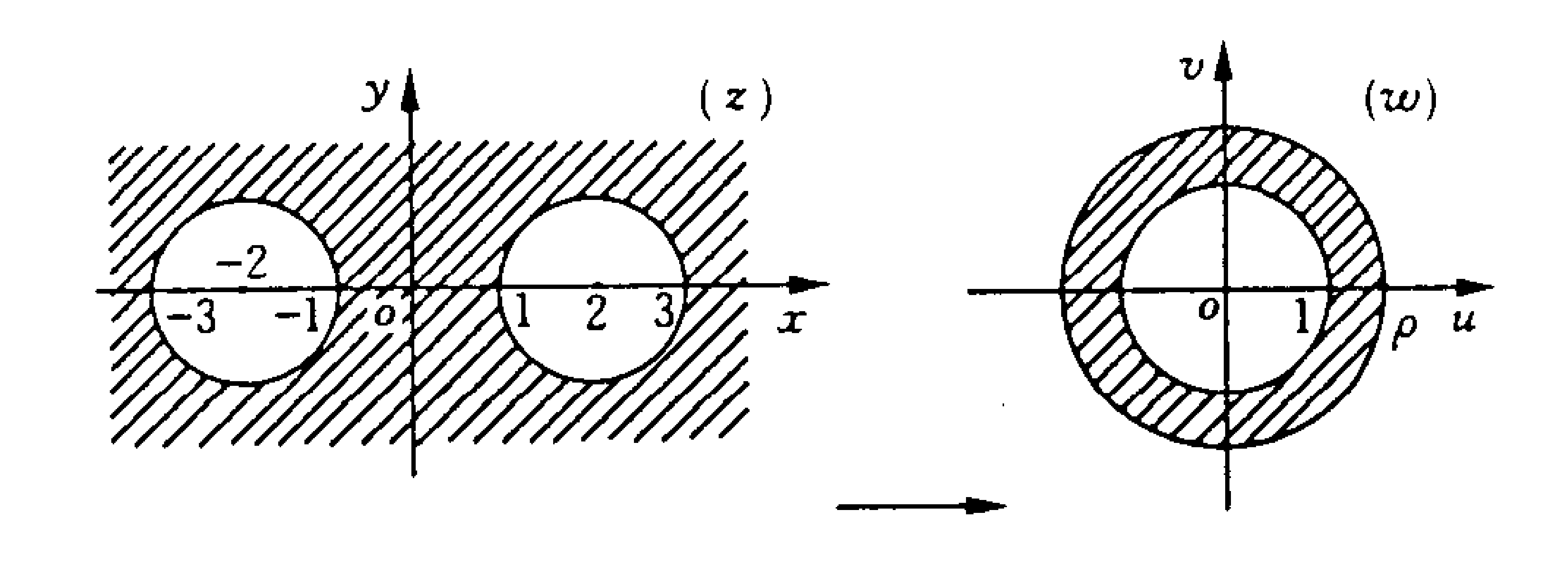


图 6.22

故，分式线性映射为

$$\frac{z-3}{z-1} : \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{w-1}{w+1} : \frac{-\rho-1}{-\rho+1},$$

即
$$\frac{4+2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} : \frac{z-3}{z-1} = 2\frac{w-1}{w+1},$$

故
$$w = \frac{(5+3\sqrt{3})z-(9+5\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})z+(3+\sqrt{3})}.$$

讨论求得映射是否合乎要求. 因为 a,b,c,d 都是实数，所以将 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)=0$；由绕向知，将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故将 $|z-2|=1$ 映为 $|w|=1$. 由 $|z-2|>2$ 中点 -1 对应 $|w|>1$ 中点，所以 $|z-2|>2$ 映为 $|w|>1$. 同理 $|z+2|>2$ 映为 $|w|<\rho$. 故知，求得分式线性映射合乎要求.

例 31 求将圆环 $2<|z|<5$ 映为圆环 $4<|w|<10$ 且满足 $f(5)=-4$ 的分式线性映射(见图 6.23).

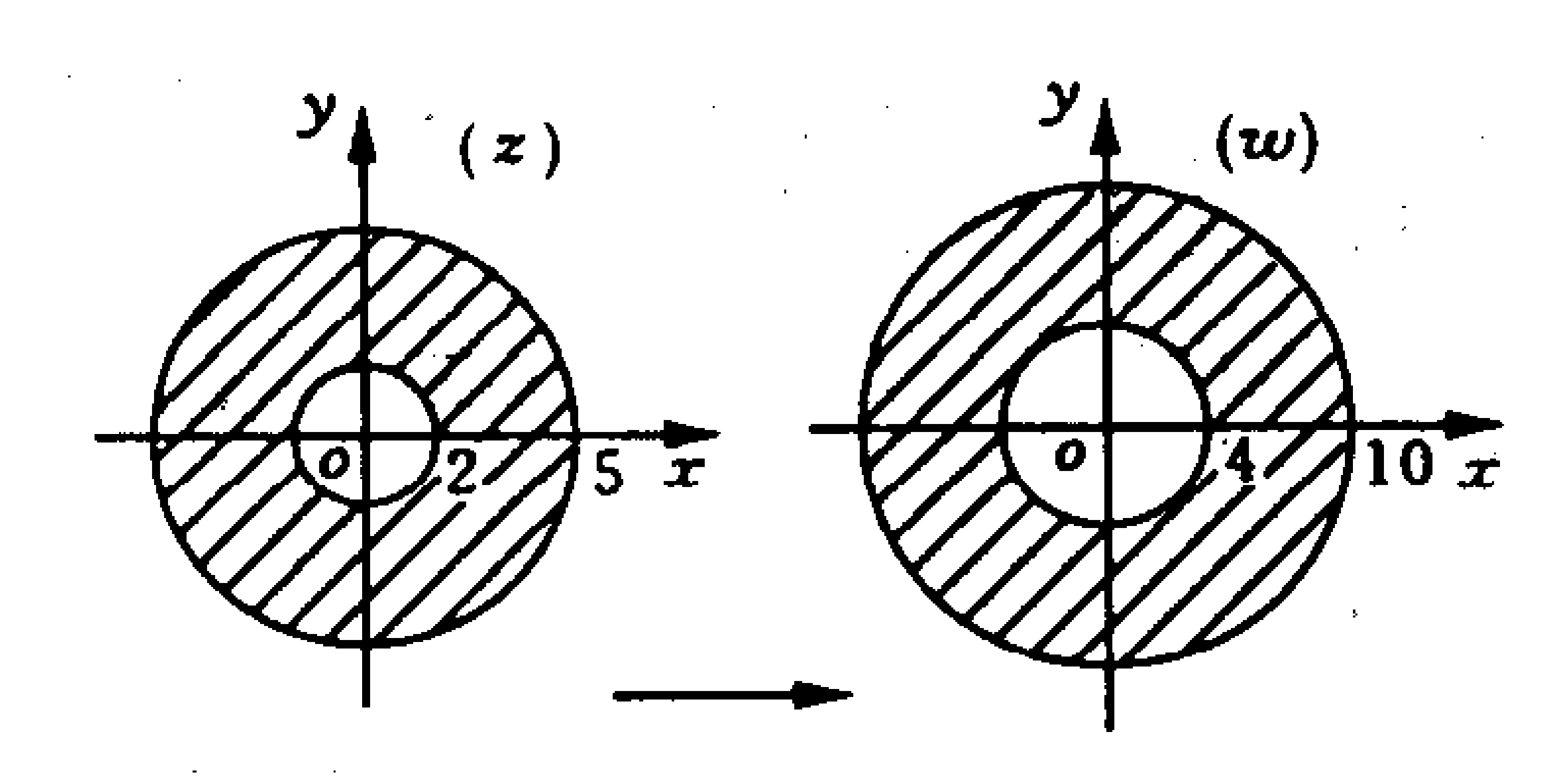


图 6.23

解 因为 $z=5,-5,-2,2$ 映为 $w=-4,4,10,-10$，由

交比不变性，有

$$\frac{2-5}{2+5}:\frac{-2-5}{-2+5}=\frac{-10+4}{-10-4}:\frac{10+4}{10-4}.$$

故 $w=f(z)$ 应为

$$\frac{z-5}{z+5}:\frac{-2-5}{-2+5}=\frac{w+4}{w-4}:\frac{10+4}{10-5},$$

即
$$\frac{w+4}{w-4}=-\frac{z-5}{z+5}\Rightarrow w=-\frac{20}{z}.$$

讨论求得映射是否合乎要求. 由于 $w=f(z)$ 将 $|z|=2$ 映为 $|w|=10$，且将 $z=5$ 映为 $w=-4$，所以 $|z|>2$ 映为 $|w|<10$. 又 $w=f(z)$ 将 $|z|=5$ 映为 $|w|=4$，将 $z=2$ 映为 $w=-10$，所以将 $|z|<5$ 映为 $|w|>4$. 以此确认，此函数合乎要求.

例 32 求将偏心圆环 $|z-3|>9$，$|z-8|<16$ 映为同心圆环 $\rho<|w|<1$ 的分式线性映射，并求 ρ 的值(见图 6.24).

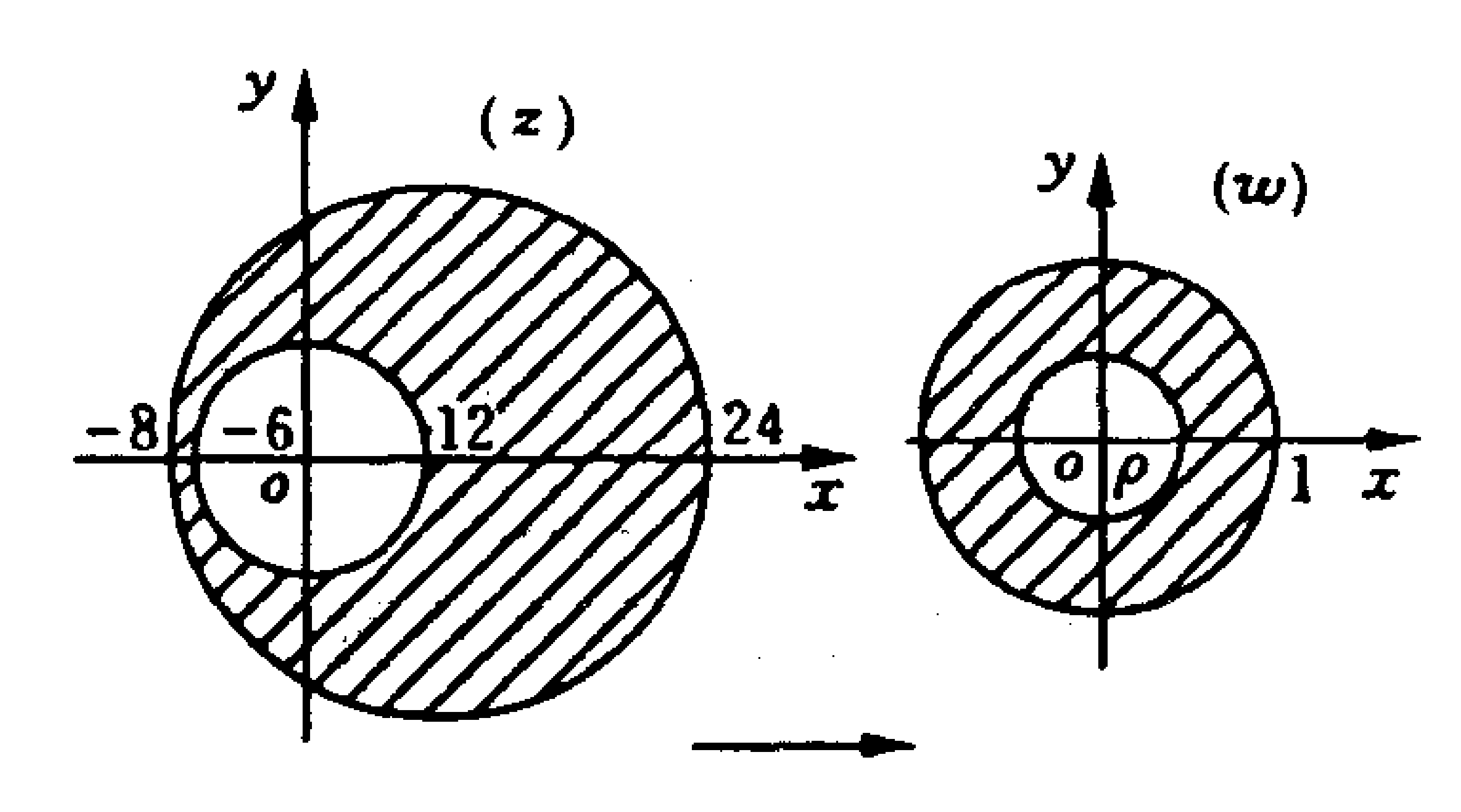


图 6.24

解 设 z 平面上点 $z=-8,-6,12,24$ 依次映射为 $w=-1,-\rho,\rho,1$. 由交比不变性，得

$$\frac{12+8}{12+6}:\frac{24+8}{24+6}=\frac{\rho+1}{\rho+\rho}:\frac{1+1}{1+\rho}\Rightarrow\rho=\frac{2}{3}.$$

于是 $w=f(z)$ 为

$$\frac{z+8}{z+6}:\frac{24+8}{24+6}=\frac{w+1}{w+2/3}:\frac{1+1}{1+2/3}\Rightarrow w=\frac{2z}{z+24}.$$

讨论映射是否符合要求. 映射将 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=\rho$，

将 $z=24$ 映为 $w=1$，所以将 $|z-3|>9$ 映为 $|w|>\rho$；映射将 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=1$，将 $z=12$ 映为 $w=\rho$，所以将 $|z-8|<16$ 映为 $|w|<1$. 确知符合要求的映射为

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{2z}{z+24}\quad(\theta\text{ 为实数}).$$

例 33 设 z 平面上过点 a 和 b 的两条圆弧围成区域 D，两圆弧在 a 点的夹角为 θ，求 D 在映射 $w=k\frac{z-a}{z-b}$ 下的像域 G（见图 6.25）.

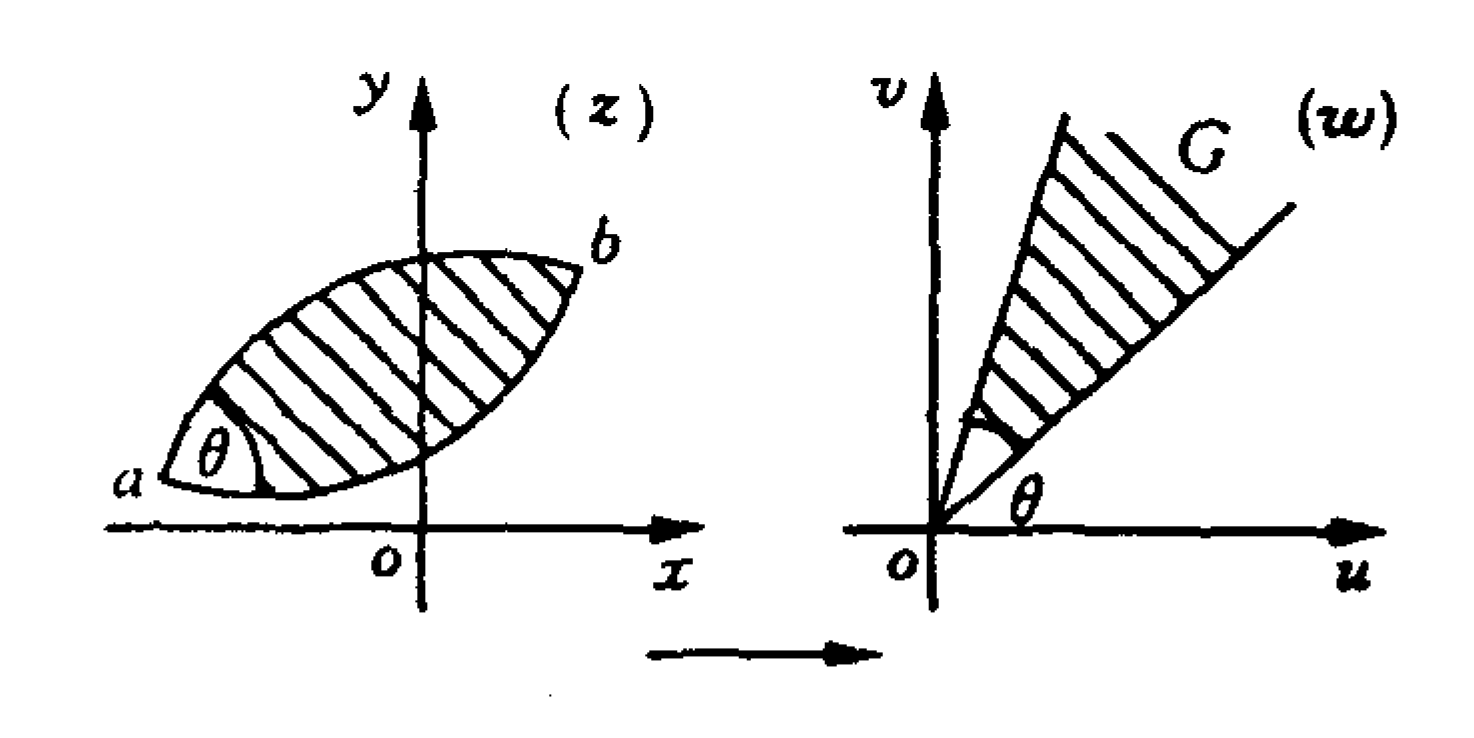


图 6.25

解 将 $z=a,b$ 代入，得 $z=a$ 映为 $w=0$，$z=b$ 映为 $w=\infty$，而 $a\neq b$. 所以两圆弧映为过 $w=0$ 和 $w=\infty$，夹角为 θ 的角形域 D.

例 34 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为 $|w|<R$，且使 $f(\mathrm{i})=0$，$f'(\mathrm{i})=1$ 的分式线性映射 $f(z)$，并确定 R 的值（见图 6.26）.

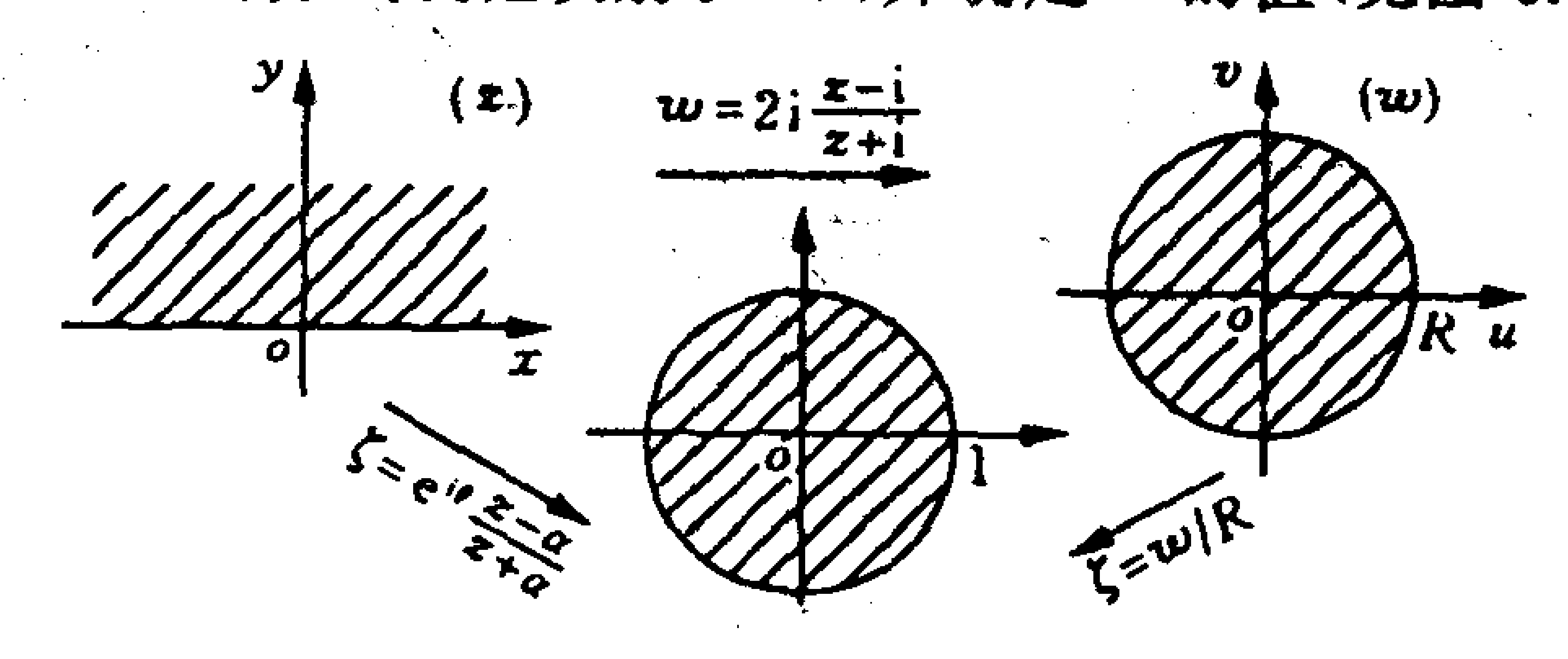


图 6.26

解　采用两边向中间靠拢的"过渡"方法.

将 $\mathrm{Im}(z)$ 映为 $|\zeta|<1$ 的分式线性映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$，将 $|w|<R$ 映为 $|\zeta|<1$ 的映射为 $\zeta=\dfrac{w}{R}$. 所以分式线性映射的形式为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}=\frac{w}{R}\Longrightarrow w=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}.$$

由
$$f(\mathrm{i})=0\Longrightarrow\alpha=\mathrm{i},$$

又由
$$f'(\mathrm{i})=1\Longrightarrow w'=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{(z-\overline{\alpha})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}=1,$$

即
$$R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}=1,$$

知
$$R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=2\mathrm{i}\Longrightarrow R=2,\quad\theta=\frac{\pi}{2}.$$

于是，所求映射为

$$w=2\mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

例 35　求将 $|z|<R_1$ 映为 $|w|<R_2$ 且使 $w(a)=b$，$\arg w'(a)=\theta$ $(|a|<R_1,|b|<R_2)$ 的分式线性映射(见图 6.27).

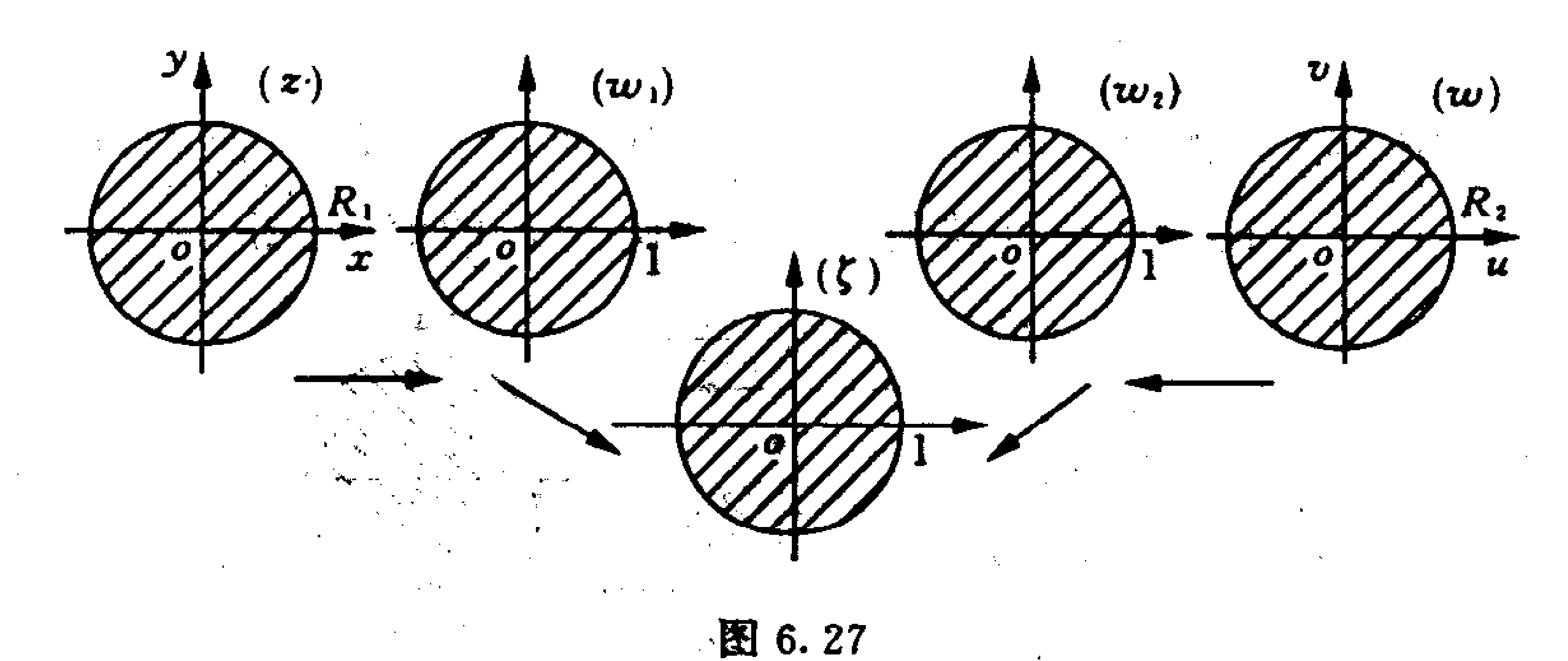


图 6.27

解　采用从两头向中间靠拢的"过渡"方法.

作映射 $w_1=\dfrac{z}{R_1}$ 将 $|z|<R_1$ 映为 $|w_1|<1$，将点 a 映为点 $\dfrac{a}{R_1}$；

再作映射 $\zeta = e^{i\theta_1} \dfrac{w_1 - a/R_1}{1 - w_1\bar{a}/R_1}\left(= R_1 e^{i\theta_1} \dfrac{z-a}{R_1^2 - \bar{a}z}\right)$，将 $|w_1| < 1$ 映为 $|\zeta| < 1$，将点$\dfrac{a}{R_1}$ 映为 $\zeta = 0$.

同理，作映射 $w_2 = \dfrac{w}{R}$ 将 $|w| < R_2$ 映为 $|w_2| < 1$，将点 b 映为$\dfrac{b}{R_2}$；再作映射 $\zeta = e^{i\theta_2} \dfrac{w_2 - b/R_2}{1 - w_2\bar{b}/R_2} = \left(R_2 e^{i\theta_2} \dfrac{w-b}{R_2^2 - \bar{b}w}\right)$，将 $|w_2| < 1$ 映为 $|\zeta| < 1$，点$\dfrac{b}{R_2}$ 映为 $\zeta = 0$. 于是，所求映射为

$$R_1 e^{i\theta_1} \frac{z-a}{R_1^2 - \bar{a}z} = R_2 e^{i\theta_2} \frac{w-b}{R_2^2 - \bar{b}w},$$

即
$$\frac{w-b}{R_2^2 - \bar{b}w} = \frac{R_1}{R_2} e^{i\theta} \frac{z-a}{R_1^2 - \bar{a}z} \quad (\theta = \theta_1 - \theta_2).$$

例 36 证明：分式线性映射把一组同心圆映为另一组同心圆后，其半径之比不变.

证 设 $C_1: |z - z_0| = r_1$ 和 $C_2: |z - z_0| = r_2$ 是两个同心圆 $(r_1 \neq r_2)$. 经线性映射映为同心圆 $\Gamma_1: |w - w_0| = R_1$ 和 $\Gamma_2: |w - w_0| = R_2 (R_1 \neq R_2)$.

因为 z_0 与 ∞ 是关于 C_1 和 C_2 都对称的一对点，则它们经映射后的像点 w_1 与 w_2 必是关于 Γ_1 和 Γ_2 都对称的一对点，即

$$w_2 - w_0 = \frac{R_1^2}{\overline{w_1} - \overline{w_0}}, \quad w_2 - w_0 = \frac{R_2^2}{\overline{w_1} - \overline{w_0}}.$$

于是
$$\frac{R_1^2}{\overline{w_1} - \overline{w_0}} = \frac{R_2^2}{\overline{w_1} - \overline{w_0}}.$$

因为 $R_1 \neq R_2$，所以 w_1 或等于 w_0，或为 ∞，即 w_1 与 w_2 两点，一点为圆心，一点为 ∞.

(1) 设 z_0 对应 w_0，$z = \infty$ 对应 $w = \infty$，则 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ 中，$c = 0, d \neq 0$，所以 $w = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$.

又 $$w_0=\frac{a}{d}z_0+\frac{b}{d}\Longrightarrow\frac{b}{d}=w_0-\frac{a}{d}z_0,$$

于是 $$w=\frac{a}{d}z+w_0-\frac{a}{d}z_0\Longrightarrow w-w_0=\frac{a}{d}(z-z_0),$$

所以

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{|w-w_0|}{|w'-w_0|}=\frac{|a/d||z-z_0|}{|a/d||z'-z_0|}=\frac{r_2}{r_1}.$$

(2) 设 z_0 对应 ∞，$z=\infty$ 对应 $w=w_0$，则 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中 $w_0=\dfrac{a}{c}$，$z_0=-\dfrac{d}{c}$，即 $c\neq 0$. 于是

$$w=\frac{az/c+b/c}{z+d/c}=w_0+\frac{w_0z+b/c}{z-z_0}=w_0+\frac{A}{z-z_0},$$

即 $$w-w_0=\frac{A}{z-z_0}.$$

所以

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{|w-w_0|}{|w'-w_0|}=\frac{A}{|z-z_0|}\Big/\frac{A}{|z'-z_0|}=\frac{|z'-z_0|}{|z-z_0|}=\frac{r_1}{r_2}.$$

例 37 设函数 $w=f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，且满足 $|f(z)|<1$ ($|z|<1$)，则在 $|z|<1$ 内，恒有：

(1) $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|\leqslant\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|$，其中 $|z_0|<1$；

(2) $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\dfrac{1}{1-|z|^2}$ (施瓦兹-毕卡定理).

证 (1) 建立函数

$$w_1=\frac{f\left(\dfrac{z_1+z_0}{1+\bar{z}_0z_1}\right)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f\left(\dfrac{z_1+z_0}{1+\bar{z}_0z_1}\right)}=F(z_1)\quad\left(z_1=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right),$$

由将单位圆映为单位圆的典型分式线性映射知，当 $|z|<1$ 时，$\left|\dfrac{z_1+z_0}{1+\bar{z}_0z_0}\right|<1$. 于是，当 $|f(z)|<1$ 时，w_1 在 $|z_1|<1$ 内解析，且有

$$|F(z_1)| < 1, \quad F(0) = 0.$$

由施瓦兹引理(见第五章第一节例 11)知,当 $|z_1| < 1$ 时,$|F(z_1)| \leqslant |z_1|$. 所以当 $|z| < 1$ 时,命题(1) 成立.

(2) 由题(1) 知,当 $z = z_0$ 时,有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \left|\frac{1 - \overline{f(z_0)}f(z_0)}{1 - \bar{z}_0 z_0}\right|.$$

两边令 $z \to z_0$,取极限,得

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2} \quad 或 \quad \frac{|f'(z_0)|}{1 - |f(z_0)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

第三节　几个初等函数构成的映射

主要内容

1. 幂函数 $w = z^n$($n \geqslant 2$,自然数)所构成的映射在 z 平面内除原点外处处是共形的.

它将 z 平面上圆周 $|z| = r$ 映为 w 平面圆周 $|w| = r^n$(将 $|z| = 1$ 映为 $|w| = 1$),将射线 $\theta = \theta_0$ 映为射线 $\theta = n\theta_0$,将正实轴 $\theta = 0$ 映为正实轴 $\varphi = 0$,将角形域 $0 < \theta < \theta_0\left(< \dfrac{2\pi}{n}\right)$ 映为角形域 $0 < \varphi < n\theta_0$. 当 $n \geqslant 2$ 时,映射 $w = z^n$ 在 $z = 0$ 处没有保角性.

角形域 $0 < \theta < \dfrac{2\pi}{n}$ 经映射 $w = z^n$ 映为沿正实轴剪开的 w 平面 $0 < \varphi < 2\pi$,即角形域张角扩大了 n 倍. 如果要将角形域映为角形域,可以利用幂函数.

2. 指数函数 $w = e^z$ 所构成的映射在全平面是共形的.

$w = e^z$ 将 z 平面上直线 $x =$ 常数映为 w 平面上圆周 $\rho =$ 常数,将直线 $y =$ 常数映为射线 $\varphi =$ 常数,将带形域 $0 < \operatorname{Im}(z) < a$

$(0 < a \leqslant 2\pi)$ 映为角形域 $0 < \arg w < a$(将带形域 $0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi$ 映为沿正实轴剪开的 w 平面 $0 < \arg w < 2\pi$),且一一对应.

如果要将带形域映为角形域可利用指数函数.

3. 茹可夫斯基函数 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$ $(a > 0)$. 除 $z = 0$ 和 $z = \pm a$ 外处处共形, 因为 $z = 0$ 为极点, $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$ $\left(a = 1 \text{ 时}, w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)\right)$.

茹可夫斯基函数可化为$\frac{w-a}{w+a} = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^2$,又可分解为$\zeta = \frac{z-a}{z+a}$, $t = \zeta^2$, $\frac{w-a}{w+a} = t$,所以茹可夫斯基映射将一个通过点 $z = a$ 与 $z = -a$ $(z > 0)$ 的圆周 C 的外部一一对应地共形映射为一个除去联结点 $w = a$ 与 $w = -a$ 的圆弧 δ 的扩充复平面. 当 C 为圆周 $|z| = a$ 时, δ 退化为线段 $-a \leqslant \mathrm{Re}(w) \leqslant a$, $\mathrm{Im}(w) = 0$.

4. 正弦函数 $w = \sin z$ 除点 $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (k 是整数) 外在全平面是处处共形的.

其单叶性区域有很多,如:

(1) $\mathrm{Im}(z) > 0$, $-\pi < \mathrm{Re}(z) < \pi$,或更一般地有

G_k: $\mathrm{Im}(z) > 0$, $(2k-1)\pi < \mathrm{Re}(z) < (2k+1)\pi$ (k 为整数).

(2) $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(w) < \frac{\pi}{2}$,或更一般地有

$$R_k: \left(-\frac{1}{2} + k\right)\pi < \mathrm{Re}(z) < \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi.$$

$w = \sin z$ 可以分解为

$$z_1 = \mathrm{i}z,\ z_2 = \mathrm{e}^{z_1},\ z_3 = -\mathrm{i}z_2,\ w = \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right).$$

$w = \sin z$ 将 G_k 映为全平面上除去实轴上线段$[-1,1]$和负虚轴后区域,将 R_k 映为全平面上除去实轴上线段$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$后区域.

5. 余弦函数 $w = \cos z$ 除点 $z = k\pi$ (k 是整数) 在全平面处处共形.

其单叶性区域也很多,如

(1) $\mathrm{Im}(z) > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \dfrac{3\pi}{2}$,或更一般地有

$$G_k^*: \mathrm{Im}(z) > 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \mathrm{Re}(z) < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

(2) $0 < \mathrm{Re}(z) < \pi$,或更一般地有

$$R_k^*: k\pi < \mathrm{Re}(z) < (k+1)\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

$w = \cos z$ 将区域 G_k^* 单叶地保形映为全平面上除去实轴上线段 $[-1,1]$ 及正虚轴后区域,将 R_k^* 映为全平面上除去实轴上射线 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 后的区域.

疑 难 解 析

1. 映射 $w = \sqrt{z}$ 能否将 $|z| < 1$ 映为 $|w| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0$? 为什么?

答 不能.根式函数有将角形域缩小到 $1/n$ 的作用,但 $|z| < 1$ 不是角形域,这是因为 $|z| < 1$ 没有裂缝.若改为 $|z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi$ 就可以了.

2. 如何将图 6.25 所示的两圆弧围成区域共形地映为以图 6.28 所示的原点为顶角的角形域?

答 两圆弧交于 ab 两点.若分式线性映射把 a 映为原点,b 映为 ∞,则 C_1, C_2 就映为从原点出发的两条射线 L_1, L_2,且顶角 α 等于两圆弧在 a 点的夹角 α.故分式线性映射为

$$w = k\frac{z-a}{z-b},$$

其中 k 为待定实常数.

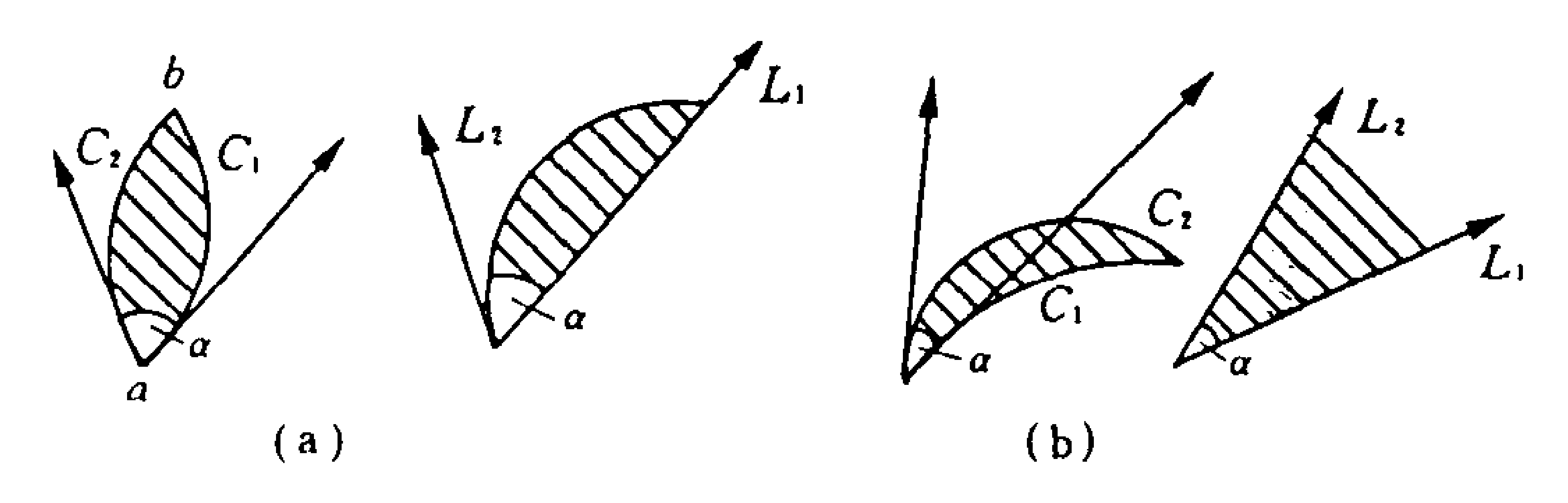


图 6.28

若要使 L_1 与正实轴重合，只需在 C 上与正实轴上取定一对点来确定 k 的值.

3. 如何将图 6.29 所示的两个相切的圆周围成的区域 D 映成以原点为顶点的角形域 $G: 0 < \arg(\zeta) < \delta$?

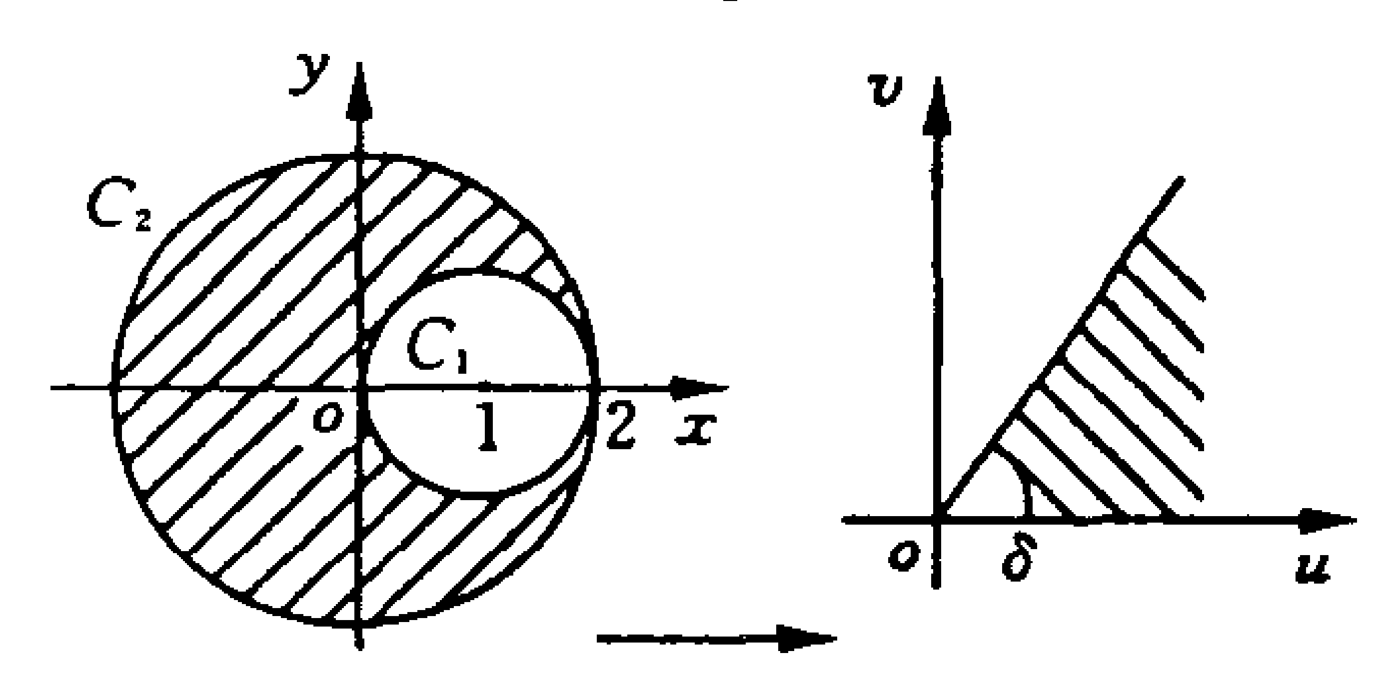


图 6.29

答　先将 D 映为带形域 $0 < \mathrm{Im}(w) < \delta$，即将切点 $z = 2$ 映为 ∞ 点. 两圆周 C_1 和 C_2 映为两平行直线，再经平移、旋转、伸缩映射而成. 分式线性映射可表示为

$$w = k\frac{z-a}{z-2} \quad (k \text{ 和 } a \text{ 为待定常数}).$$

再利用 $\zeta = e^w$ 即可把带形域 $0 < \mathrm{Im}(w) < \delta$ 映为角形域 $0 < \arg(\zeta) < \delta$.

4. 幂函数 $w = z^n (z \neq 0)$ 具有将角度扩大 n 倍的性质，为什么它对以 $z = 0$ 为顶点、张角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的角域构成共形映射?

答　$w = z^n$ 有将角度扩大 n 倍的性质，但只在 $z = 0$ 点. 因为 $w'(0) = 0$，所以在 $z = 0$ 不共形. 但以 $z = 0$ 为顶点张角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的角

域是其单叶解析区域，故映射是共形的.

5. 为什么映射 $w=z^2$ 能将圆周的内部映为心脏线的内部(见图 6.30)?

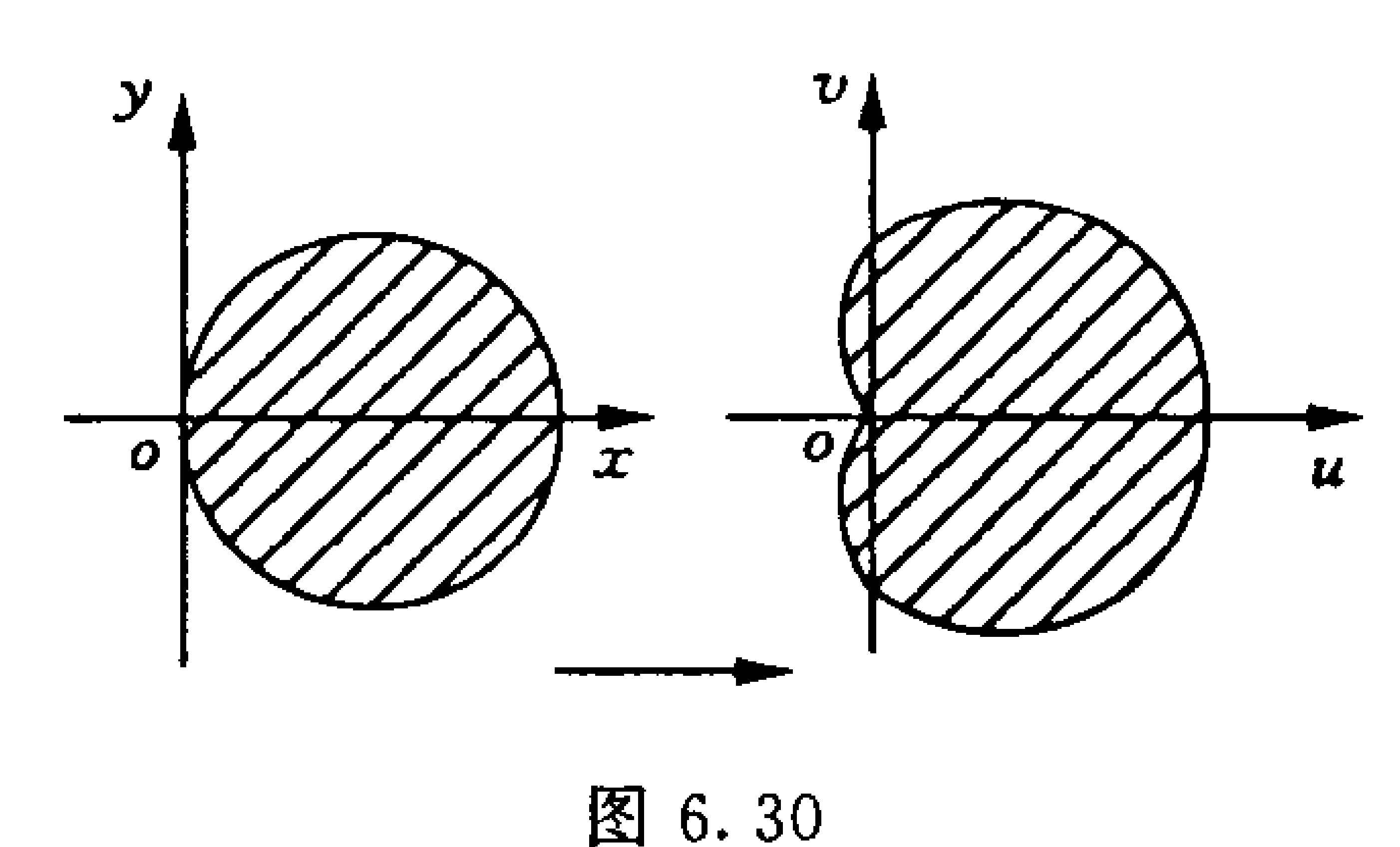


图 6.30

答　将函数 $w=z^2$ 表成极坐标形式：令 $w=\rho e^{i\varphi}$，$z=re^{i\theta}$，则 $w=\rho e^{i\varphi}=r^2e^{i2\theta}$，即 $r=\sqrt{\rho}$，$\theta=\dfrac{\varphi}{2}$.

由于圆周(不妨设为单位圆周 $|z-1|=1$)方程为 $r=\cos\theta$，于是得

$$\sqrt{\rho}=\cos\frac{\varphi}{2},\quad 即\quad \rho=\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi).$$

此即 w 平面上心脏线的方程.

方法、技巧与典型例题分析

利用初等函数完成由一个图形到另一个图形的映射常常不是一步可以实现的，往往需要经过几步转换. 因此，必须熟悉分式线性映射和初等函数映射的几种形式，它们能将什么样的区域映为什么样的区域. 因此，看到一个问题时，可以从两端想象，经过不同的变换向同一中间区域靠拢，对接起来就得到所需映射. 也可以从一端出发，分层达标，最后映为所设定区域，将一系列中间映射复合起来就得到所需映射. 注意，此时映射不是惟一的，繁简程度往往相差悬殊. 当然，我们应力求最简捷地得到映射. 这就需要多练习、多动脑才行.

例1 将图 6.31 至图 6.40 中阴影部分所示(边界为直线段或圆弧)的域共形地且互为单值地映为上半平面,求出实现各该映射的任一个函数.

解 映射不是惟一的,我们对每个图形都只给出一个可行的解法.希望读者通过练习,能自行找到最简捷的解法.

(1) 因为 $\mathrm{Im}(z) > 1, |z| < 1$ 是以原点为圆心、2 为半径的圆的一部分.先用分式线性映射

$$w_1 = \frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-\sqrt{3}-\mathrm{i}} \quad (\sqrt{3}+\mathrm{i} \xrightarrow{w_1} \infty, -\sqrt{3}+\mathrm{i} \xrightarrow{w_1} 0)$$

映为角形域;然后旋转 π 角,映为 $w_2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}w_1$;再用幂函数 $w = w_2^3$ 放大 3 倍,映为上半平面.故

$$w = w_2^3 = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}w_1)^3 = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^3$$ (见图 6.31).式中,负号是由点的对应关系决定的.

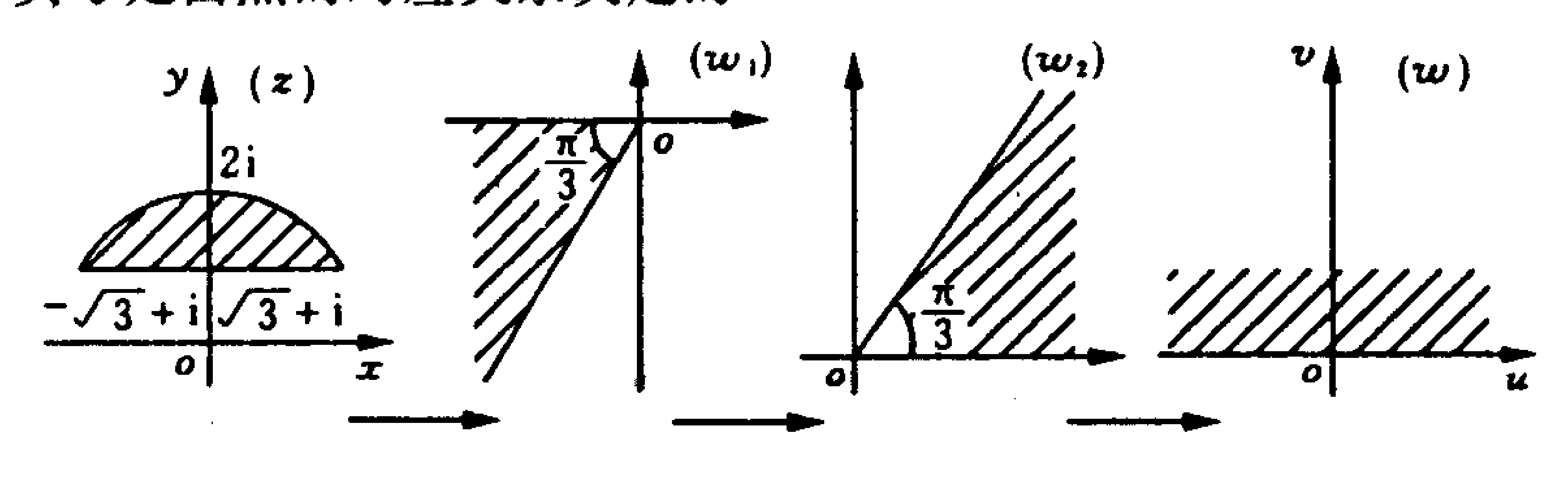


图 6.31

(2) 因为 $|z| > 2, |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}$ 是两圆弧围成的角形域,两交点为$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\mathrm{i})$ 和$(\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathrm{i})$.分式线性映射将角形域映为角形域 $\frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \frac{3}{4}\pi$.

$$w_1 = \frac{z-\sqrt{z}+\sqrt{2}\mathrm{i}}{z-\sqrt{z}-\sqrt{2}\mathrm{i}}.$$

然后旋转 $\frac{\pi}{2}$,映为 $0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{4}$,映射 $w_2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}w_1$,再用幂函

数 $w=w_2^4$ 映为上半平面. 故

$$w=w_2^4=(-e^{i\pi}w_1)^4=\left(\frac{z-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^4(见图 6.32).$$

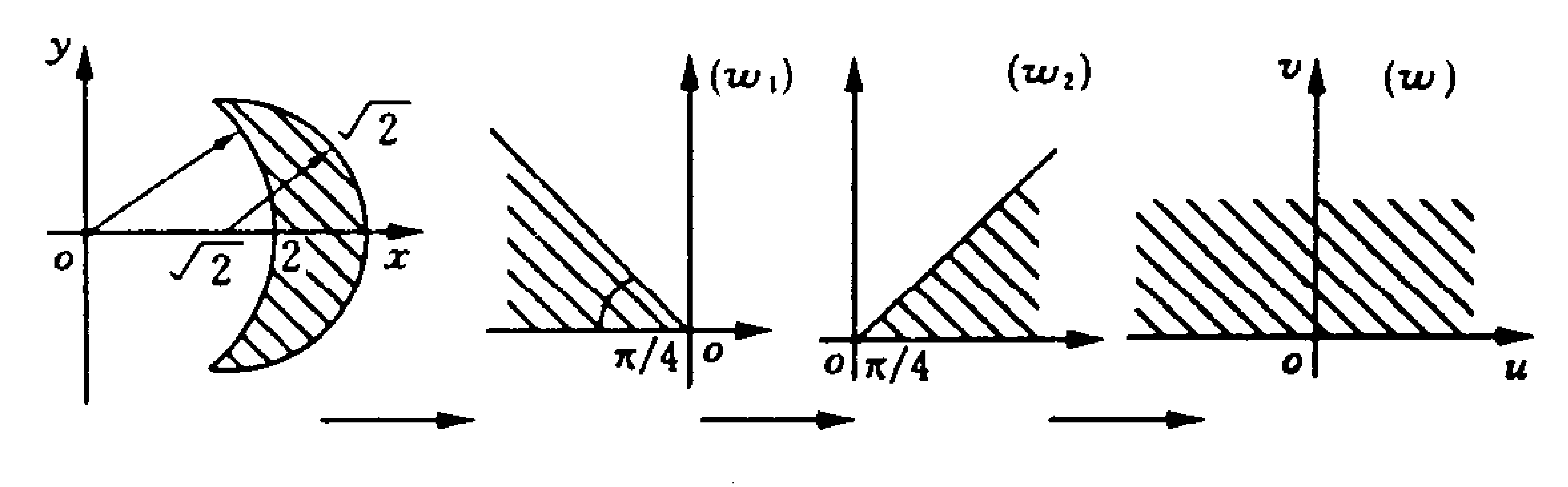


图 6.32

(3) 因为 $|z|<2, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 为扇形. 作映射 $w_1=z^4$ 映为上半圆域 $|w_1|<2, \mathrm{Im}(w_1)>0$. 实轴上交点为 ± 16. 用分式线性映射

$$w_2=-\frac{w_1-16}{w_1-16}\quad (16\to\infty,\ -16\to 0; 0\to 正实轴上点)$$

映为第一象限 $0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$; 再作映射 $w=w_2^2$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=w_2^2=\left(-\frac{w_1+16}{w_1-16}\right)^2=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2(见图 6.33).$$

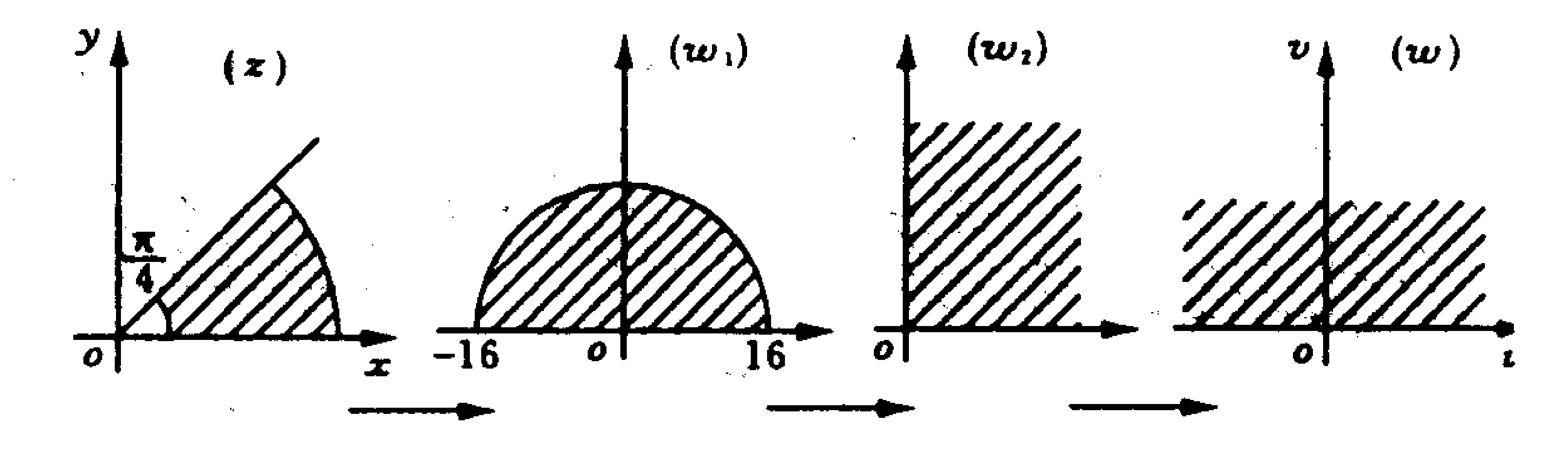


图 6.33

(4) 因为 $|z|>2, 0<\arg z<\frac{3}{2}\pi$ 是第一、第二、第三象限除去 $|z|\leqslant 2$ 区域. 用 $w_1=z^{2/3}$ 映为 $\mathrm{Im}(w_1)>0, |w_1|>2^{2/3}$; 再作

分式线性映射

$$w_2=-\frac{w_1+2^{2/3}}{w_1-2^{2/3}}\quad(2^{2/3}\to\infty,\ -2^{2/3}\to 0;0\to\text{正实轴上点})$$

映为角形域 $0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$；最后作映射 $w=w_2^2$ 映为上半平面.
故

$$w=w_2^2=\left(-\frac{w_1+2^{2/3}}{w_1-2^{2/3}}\right)^2=\left(\frac{z^{2/3}+2^{2/3}}{z^{2/3}-2^{2/3}}\right)^2\text{(见图 6. 34)}.$$

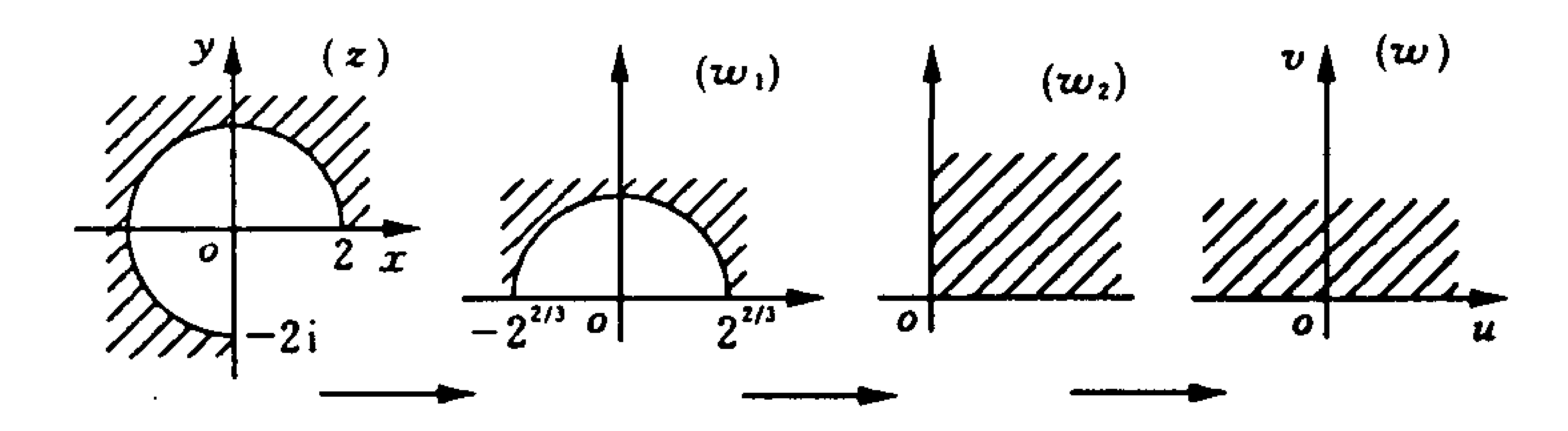


图 6. 34

(5) 连接点 $z=0$ 和 $z=ai$ 的线段为裂缝的上半平面，用映射 $w_1=z^2$ 映为有裂缝 $[-a^2,+\infty)$ 的 w_1 平面；再经平移映射 $w_2=w_1+a^2$ 映为有裂缝 $[0,+\infty)$ 的全平面 w_2；最后经映射 $w=\sqrt{w_2}$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=\sqrt{w_2}=\sqrt{w_1+a^2}=\sqrt{z^2+a^2}\text{ (见图 6. 35)}.$$

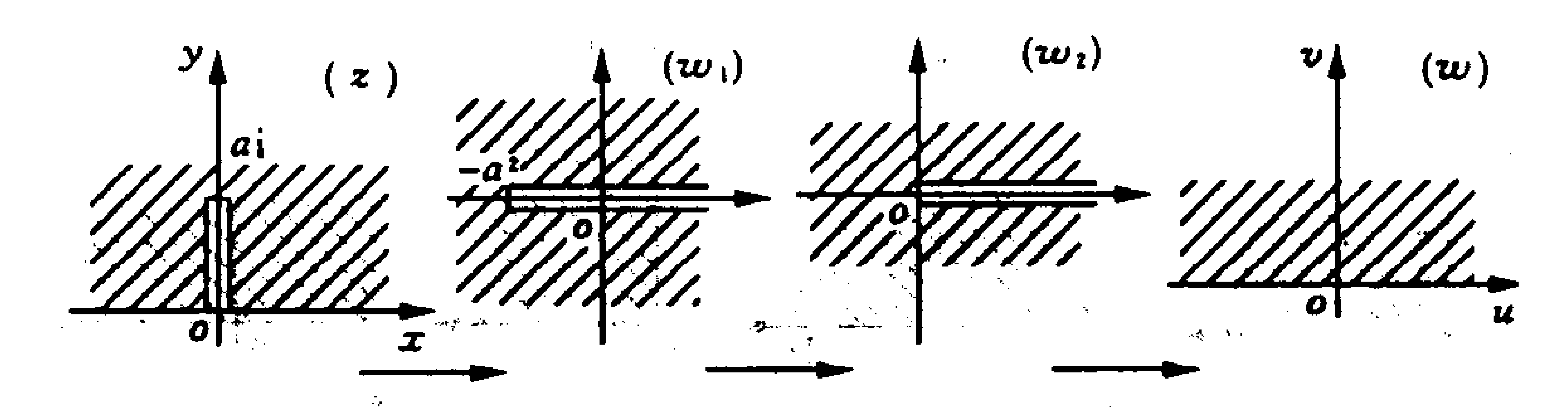


图 6. 35

(6) 图为单位圆 $|z|=1$ 外部，且沿虚轴有割痕 $[i,\infty)$. 其映射过程为

$$w_1=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}},\quad w_2=\mathrm{i}w_1,\quad w_3=w_2^2,\quad w_4=1+w_3,$$

故 $w=w_4^{1/2}=(1+w_3)^{1/2}=(1+w_2^2)^{1/2}=[1+(\mathrm{i}w_1)^2]^{1/2}$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2}\ (见图 6.36).$$

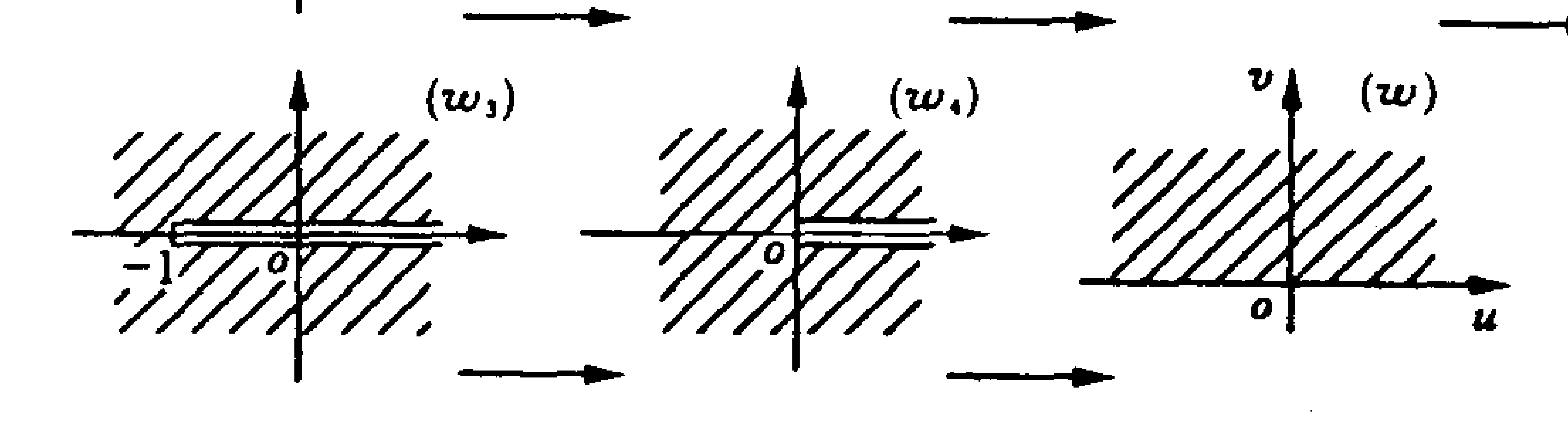


图 6.36

(7) 单位圆内部,有割痕[0,1]的区域. 先经 $w_1=z^{1/2}$ 映为上半单位圆 $\mathrm{Im}(w_1)>0,|w_1|<1$. 再经

$$w_2=-\frac{w_1+1}{w_2-1},\quad w=w_2^2$$

映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=w_2^2=\left(-\frac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2(见图 6.37).$$

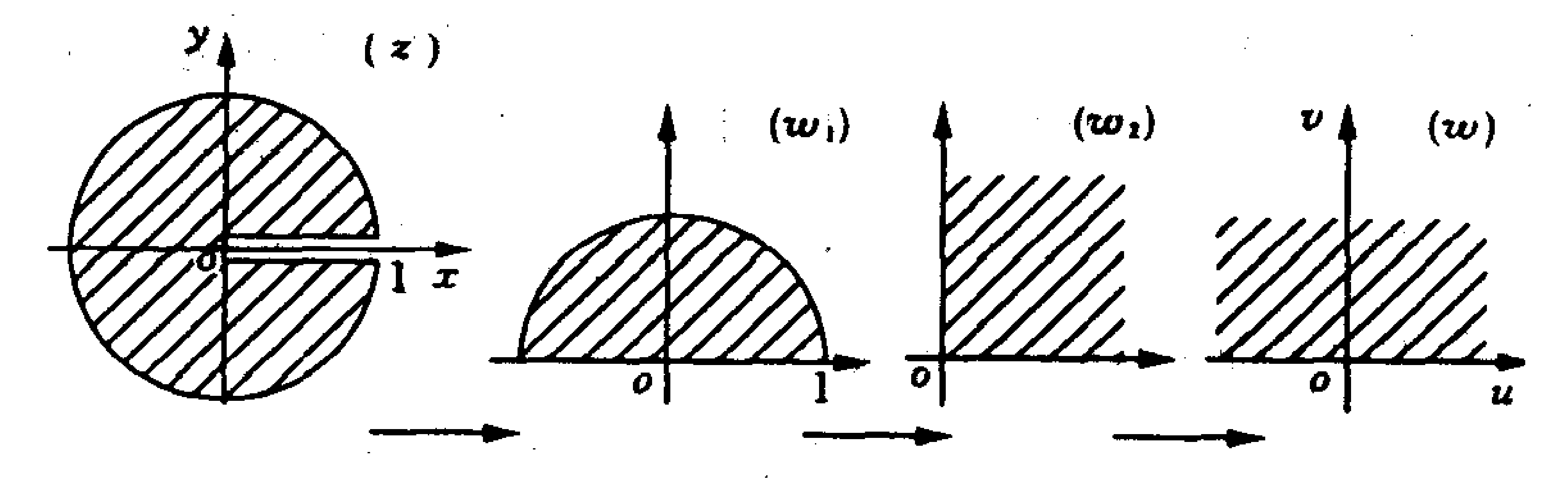


图 6.37

(8) $|z|<2,|z-1|>1$. 先经映射 $w_1=\dfrac{z}{z-2}$ 映为条件域 $0<\mathrm{Re}(w_1)<\dfrac{1}{2}$，再经映射

$$w_2=\mathrm{i}w_1,\quad w_3=2\pi w_2,\quad w=\mathrm{e}^{w_3}$$

映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=\mathrm{e}^{w_3}=\mathrm{e}^{2\pi w_2}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}w_1}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z/(z-2)}$$（见图 6.38）.

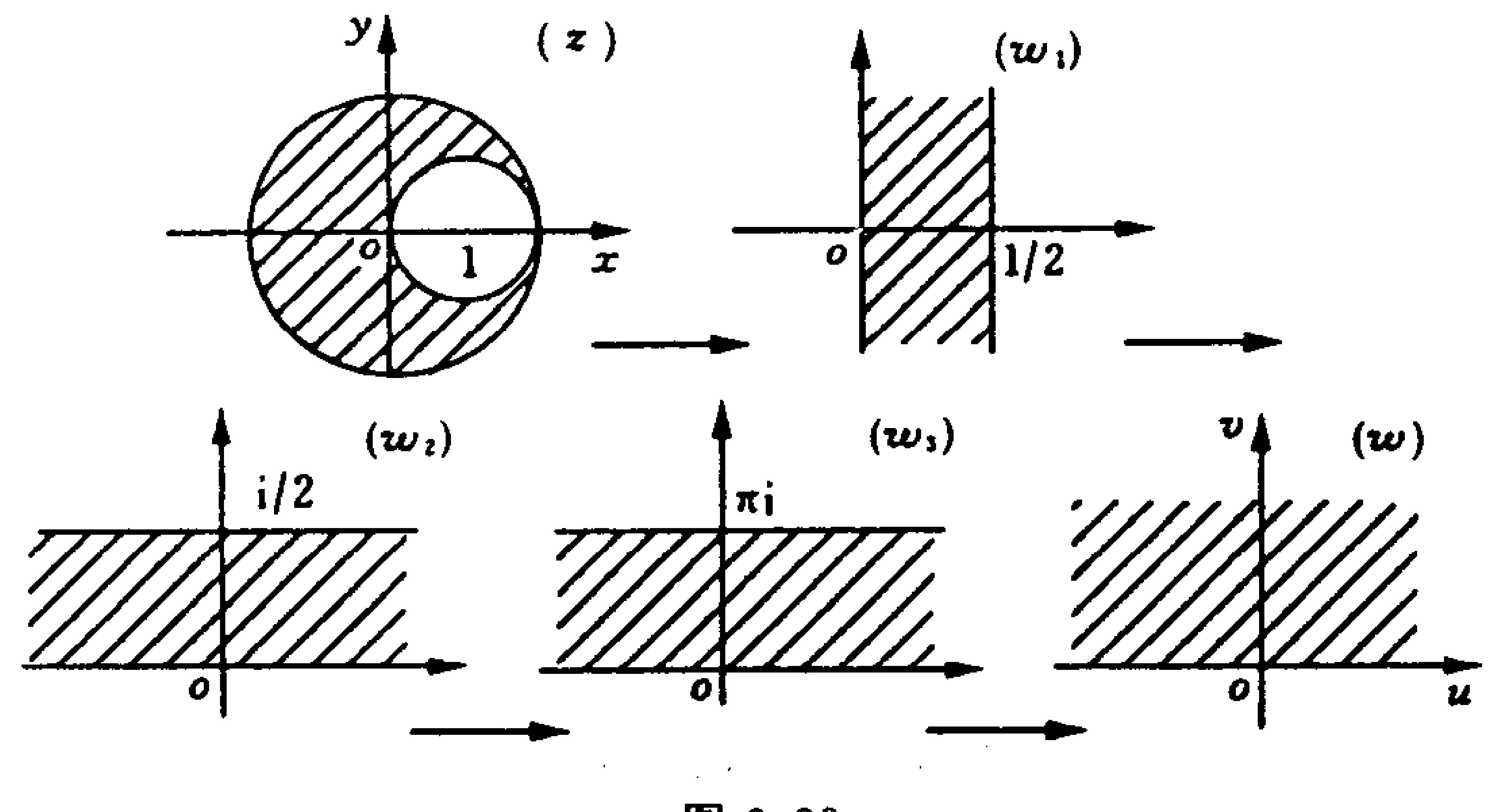


图 6.38

(9) $a<\mathrm{Re}(z)<b, 0<a<b$. 经映射

$$w_1=z-a,\quad w_2=\mathrm{i}w_1,\quad w_3=\frac{\pi w_2}{b-a},\quad w=\mathrm{e}^{w_3}$$

映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=\mathrm{e}^{w_3}=\mathrm{e}^{\pi w_2/(b-a)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi w_1/b-a}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(z-a)/(b-a)}$$（见图 6.39）.

(10) $\mathrm{Re}(z)>0, 0<\mathrm{Im}(z)<a$ 是半带形. 先映为半带形 $\mathrm{Re}(z)>0, 0<\mathrm{Im}(z)<\pi\mathrm{i}$，再经映射

$$w_1=\frac{\pi}{a}z,\quad w_2=-\mathrm{e}^{w_1},\quad w_3=-\frac{w_2+1}{w_2-1},\quad w=w_3^2$$

映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=w_3^2=\left(-\frac{w_2+1}{w_2-1}\right)^2=\left(\frac{-\mathrm{e}^{-w_1}+1}{-\mathrm{e}^{-w_1}-1}\right)^2$$

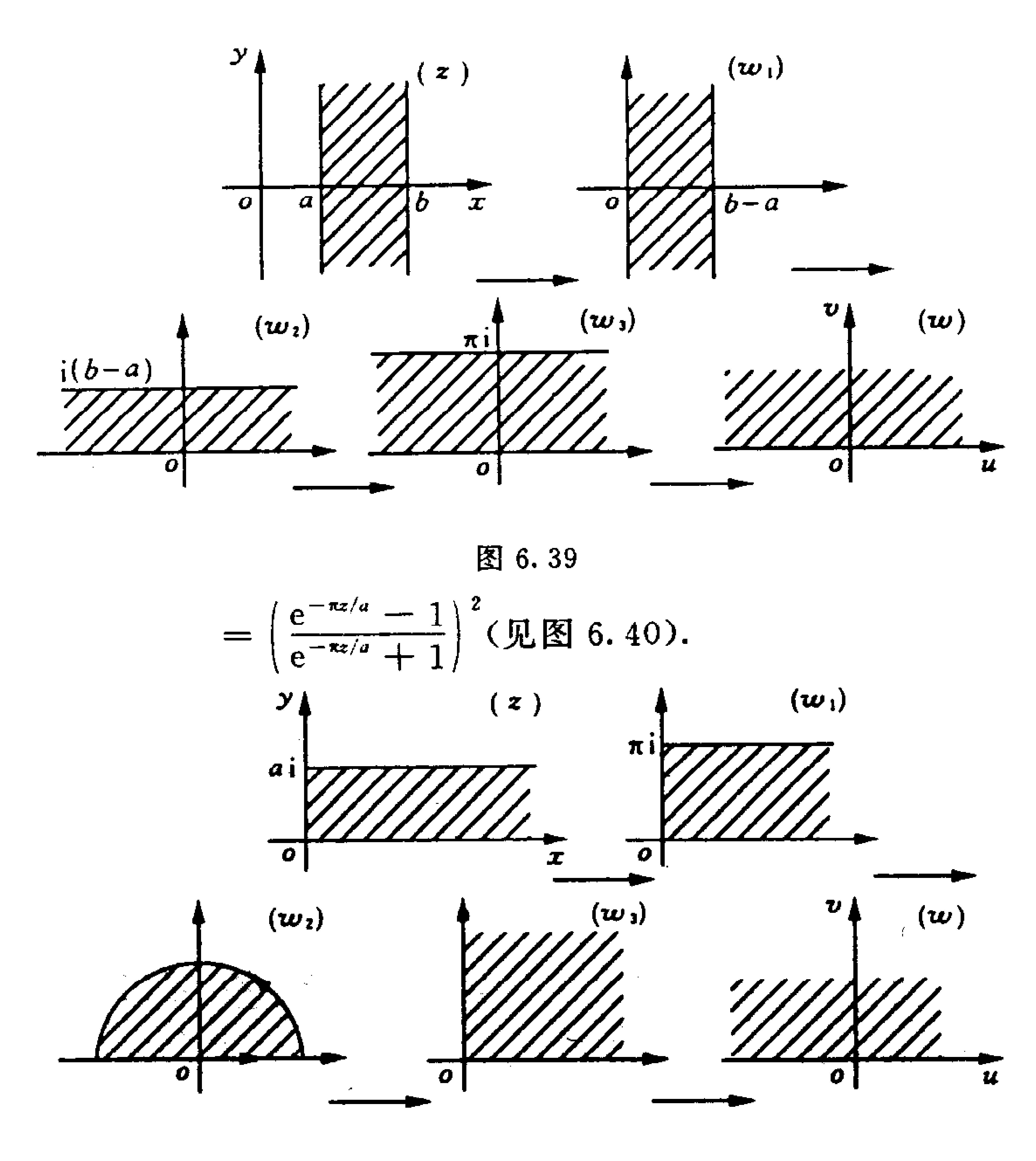


图 6.39

$$=\left(\frac{e^{-\pi z/a}-1}{e^{-\pi z/a}+1}\right)^2 \text{（见图 6.40）.}$$

图 6.40

例 2 求将单位圆外部 $|z|>1$ 映为全平面除去线段 $[-1,1]$ 的映射.

解 先用映射 $w_1=\dfrac{1}{z}$ 将 $|z|>1$ 映为 $|w_1|<1$，再用分式线性映射 $w_2=-\mathrm{i}\,\dfrac{w_1+1}{w_1-1}$ 将 $|w_1|<1$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$，然后用幂函数 $w_3=w_2^2$ 映为有割痕为正实轴的全平面，最后用分式线性映射 $w=\dfrac{w_3-1}{w_3+1}$ 将区域映为有割痕 $[-1,1]$ 的全平面.

故

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{w_3 - 1}{w_3 + 1} = \frac{w_2^2 - 1}{w_2^2 + 1} \\
&= \left[\left(-\mathrm{i}\,\frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}\right)^2 - 1\right] \Big/ \left[\left(-\mathrm{i}\,\frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}\right)^2 + 1\right] \\
&= \left[\left(\frac{1/z + 1}{1/z - 1}\right)^2 - 1\right] \Big/ \left[\left(\frac{1/z + 1}{1/z - 1}\right)^2 + 1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{（见图 6.41）.}
\end{aligned}
$$

映射 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 也能将单位圆内部映为全平面除去线段$[-1,1]$的区域. 读者试自行证出.

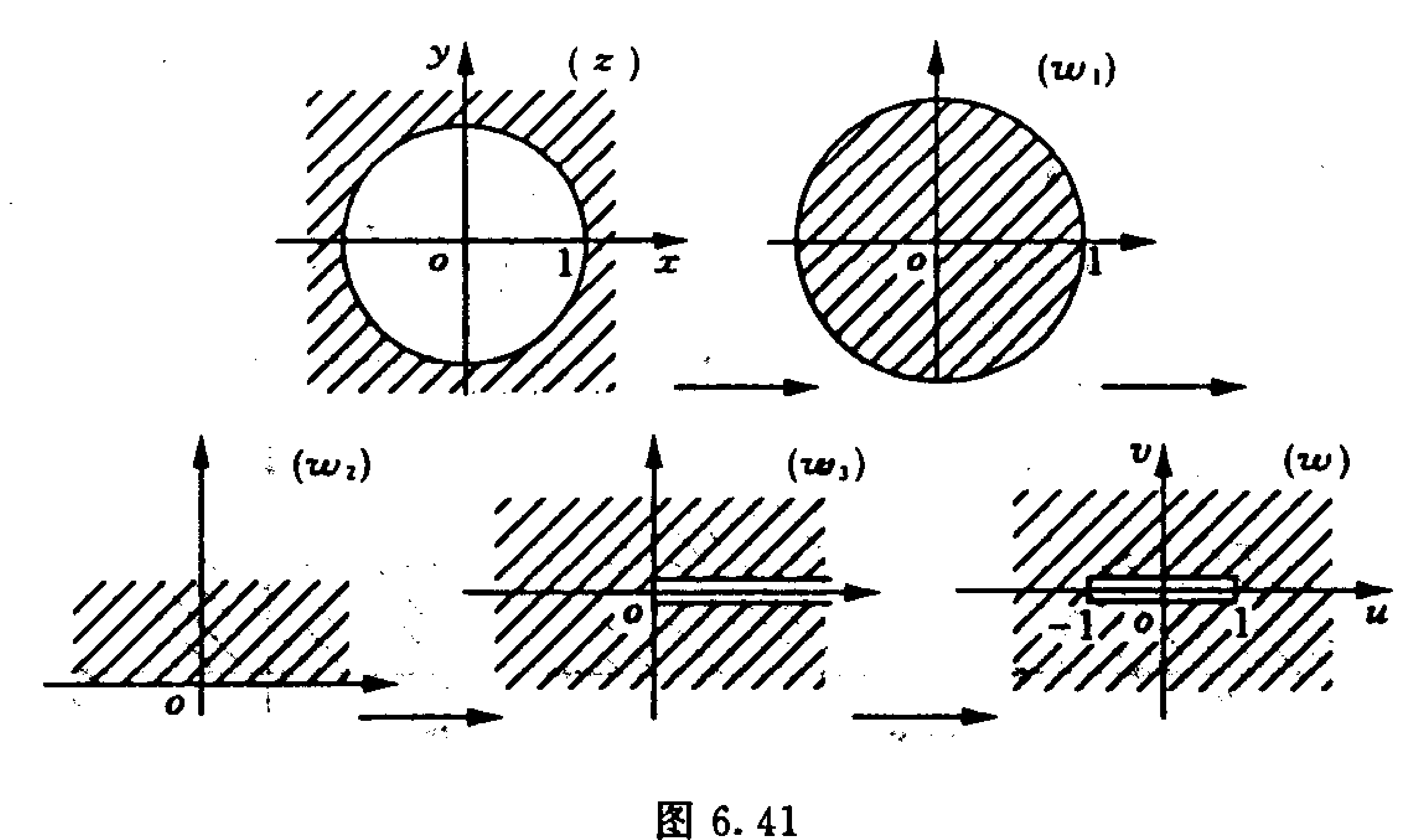


图 6.41

例 3 求将上半平面除去半圆盘 $|z| < 1$ 和半射线 $\mathrm{Im}(z) > 2, \mathrm{Re}(z) = 0$ 的区域映为 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的映射.

解 先用映射 $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 将半圆周映为实轴上线段 $[-1,1]$，半射线 $\mathrm{Im}(z) > 2, \mathrm{Re}(z) = 0$ 映为 $\mathrm{Im}(w_1) > \frac{3}{4}$，$\mathrm{Re}(w_1) = 0$，区域映为有割痕$\left[\frac{3}{4}\mathrm{i}, \infty\right)$的上半平面；再用 $w_2 = w_1^2$ 将区域映为实轴上除去$[0, +\infty)$和$\left(-\infty, -\frac{9}{16}\right]$的全平面；然

后用分式线段映射 $w_3 = \dfrac{w_2 + 9/16}{w_2} = 1 + \dfrac{9}{16w_2}$ 将区域映为除去正实轴的全平面；最后用 $w = \sqrt{w_3}$ 将区域映为上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$（取 $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 的分支）. 故

$$w = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)} \text{（见图 6.42）.}$$

图 6.42

例 4 将单位圆外 $|z| > 1$ 除去线段 $[-h, -1]$ 与 $[1, h]$ 的区域映为 $|w| > 1$ 的映射.

解 映射 $w_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ 将区域映为全平面除去线段 $[-\delta, -1]$ 和 $[1, \delta)$ 的区域，其中 $\delta = \dfrac{1}{2}\left(1 + h + \dfrac{1}{1 + h}\right) > 1$；再作映射 $w_2 = \dfrac{w_1}{\delta}$ 将区域映为全平面除去线段 $[-1, 1]$ 的区域；最后作映射 $w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$ 将区域映为 $|w| > 1$. 故

$$w = \frac{z + 1/z}{1 + h + 1/(1 + h)} \cdot \sqrt{\left(\frac{z + 1/z}{1 + h + 1/(1 + h)}\right)^2 - 1} \text{（见图6.43）.}$$

例 5 求将二角形区域 $|z + \mathrm{i}| > \sqrt{2}$，$|z - \mathrm{i}| < \sqrt{z}$ 映为

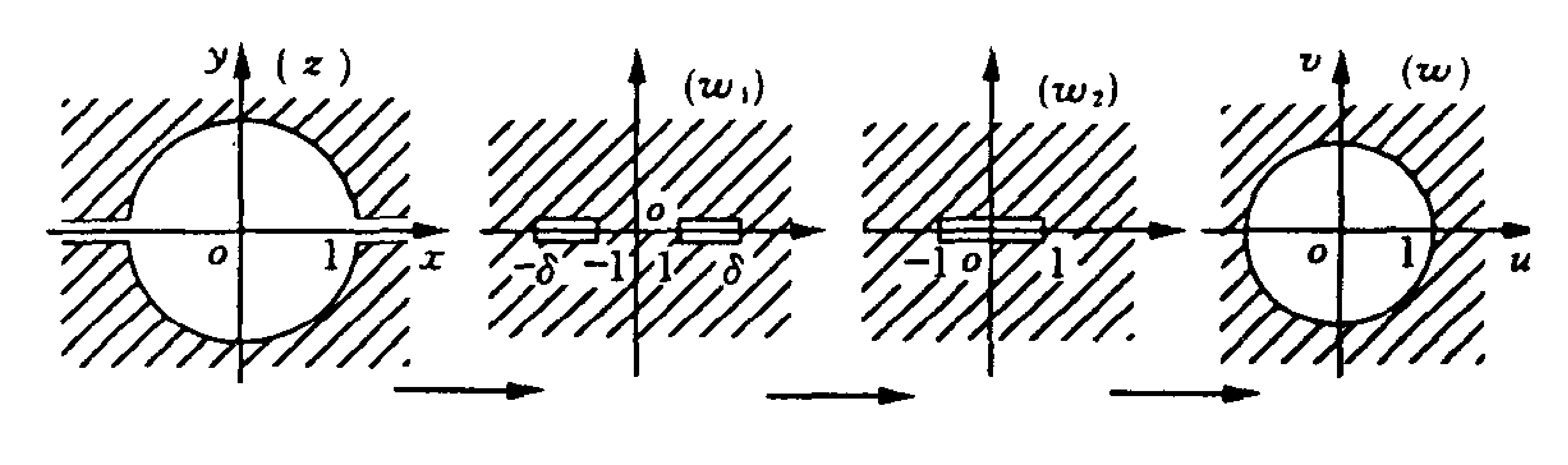


图 6.43

上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的映射.

解 作分式线性映射 $w_1=\dfrac{z+1}{z-1}$ 将区域映为角形域 $-\dfrac{3}{4}\pi<\arg w_1<-\dfrac{\pi}{4}$；再经 $w_2=w_1^2$ 将区域映为左上半平面 $\mathrm{Re}(w_2)<0$；最后作旋转映射 $w=-\mathrm{i}w_2$，即映为上半平面. 故

$$w=-\mathrm{i}w_2=-\mathrm{i}w_1^2=-\mathrm{i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \text{（见图 6.44）.}$$

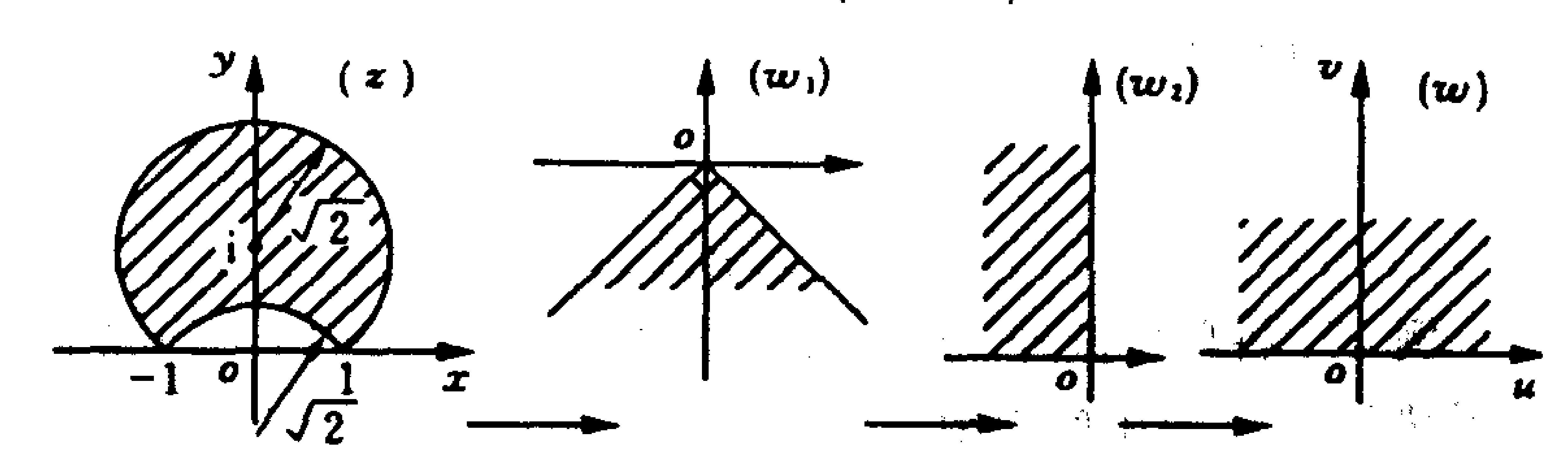


图 6.44

例 6 求相切于点 $z=a$ 的两圆周所围月牙形区域到上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的映射.

解 先将月牙形区域映为条形域 $0<\mathrm{Im}(w_1)<\pi$，因为将 $z=a$ 映为无穷远点 ∞，适当选择 c,d，即得 $w_1=\dfrac{cz+d}{z-a}$；再由 $w=\mathrm{e}^{w_1}$ 即映为 $\mathrm{Im}(w)>0$. 故

$$w=\mathrm{e}^{(cz+d)/(z-a)} \text{（见图 6.45）.}$$

例 7 求将单位圆内部除去实轴上区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 的区域映为单

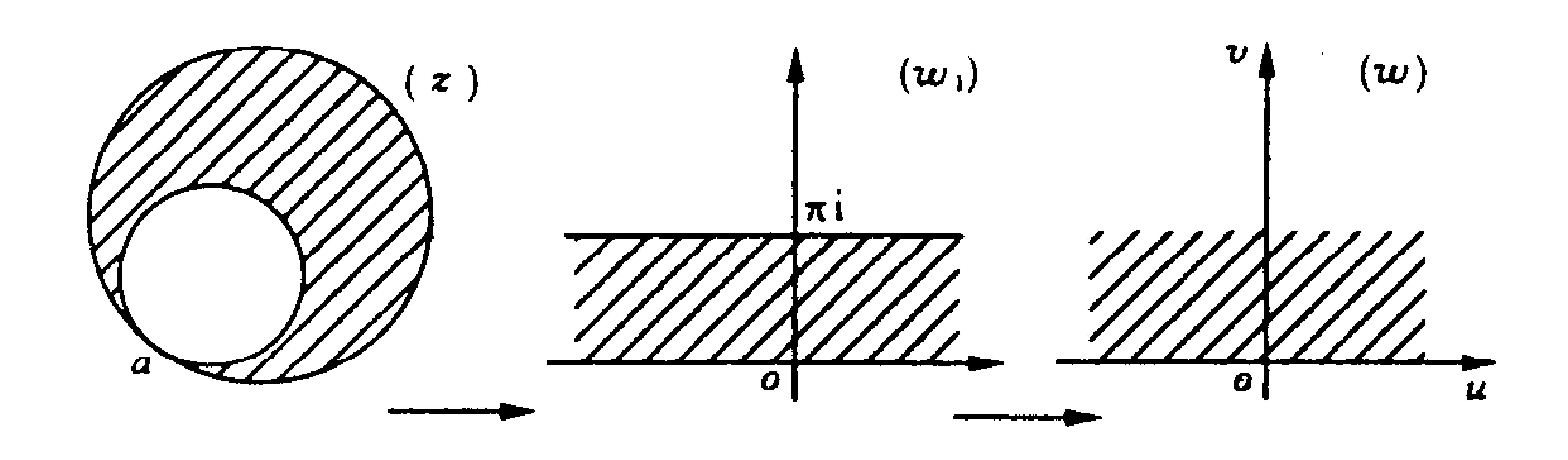


图 6.45

位圆内部，并使 $z=1,\frac{1}{2},1$ 依次映为 $w=-1,\mathrm{i},1$ 的映射.

解 作分式线性映射 $w_1=\frac{z-1/2}{1-z/2}=\frac{2z-1}{2-z}$ 将区域映为有割痕[0,1)的单位圆内部. 再作 $w_2=\sqrt{w_1}$（取 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ 那支）映为 $\mathrm{Im}(z)>0,|z|<1$. 再用 $w_3=\left(-\frac{w_2+1}{w_2-1}\right)^2$ 将其映为上半平面，然后用 $w=-\frac{w_3-\mathrm{i}}{w_3+\mathrm{i}}$ 将其映为 $|w|<1$，且使 $z=1,\frac{1}{2},1$ 映为 $w=-1,\mathrm{i},1$. 故

$$w=\frac{\left(\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}+1\right)^2-\mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}-1\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}+1\right)^2+\mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}-1\right)^2}\text{（见图 6.46）.}$$

例 8 求将有割痕$(-\infty,0]$的带形域 $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}$ 映为半带形域 $-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi,\mathrm{Re}(w)>0$ 的映射.

解 用 $w_1=\mathrm{e}^z$ 将区域映为有割痕$(0,1]$的右半平面 $\mathrm{Re}(w_1)>0$；再用 $w_2=\frac{w_1+1}{w_1-1}$ 将半平面映为有割痕$(-\infty,-1]$的单位圆外域；又用 $w_3=\mathrm{i}\sqrt{w_2}$（取 $\sqrt{1}=1$ 那支）将区域映为去上半单位圆内部的上半平面；再用 $w_4=\ln w_3$（取 $\ln 1=0$ 那支）将区域映为半带形 $0<\mathrm{Im}(w_4)<\pi,\mathrm{Re}(w_4)>0$；最后用 $w=2w_4-\mathrm{i}\pi$ 映为所求区域. 故

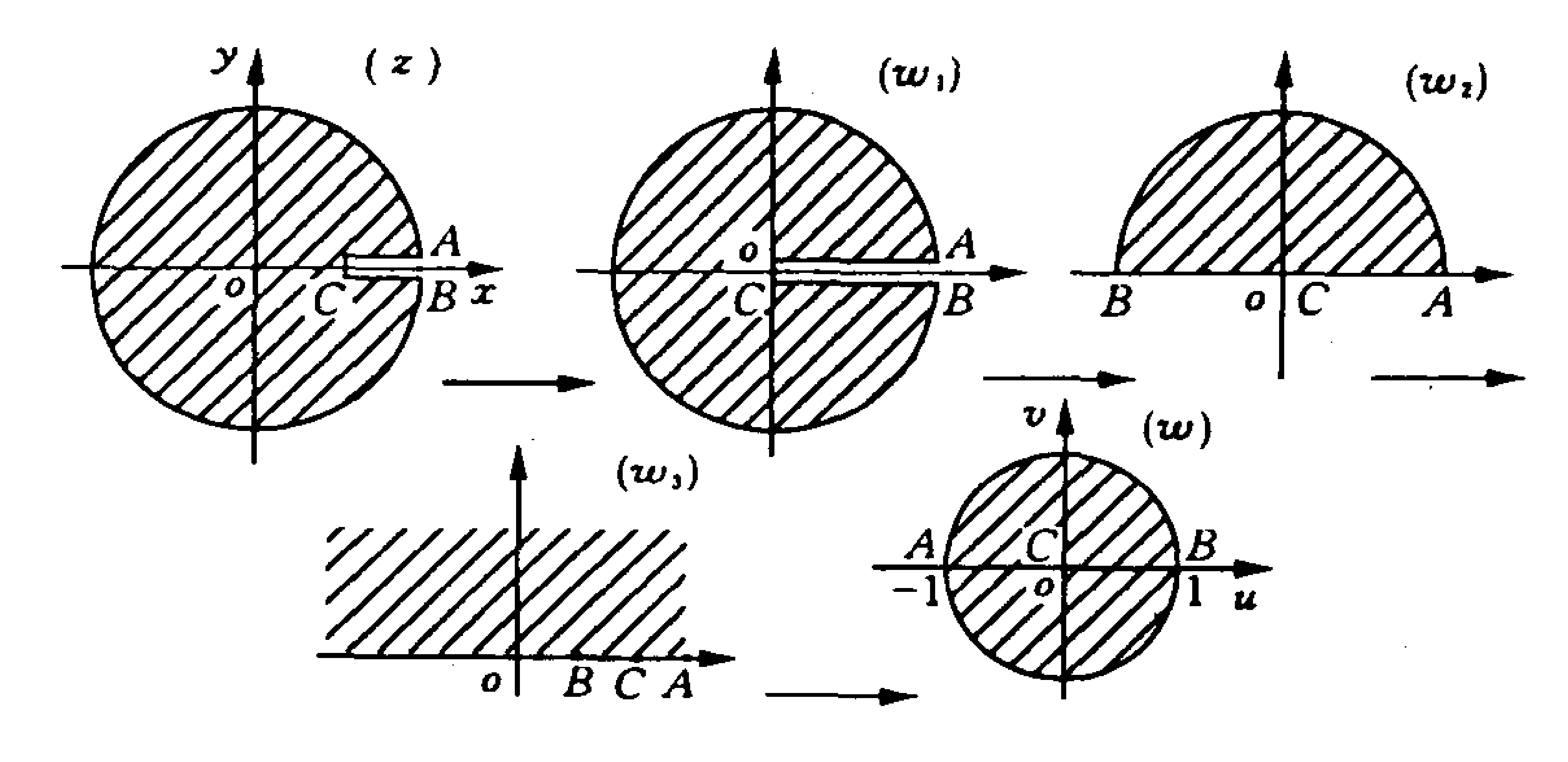


图 6.46

$$w = \ln \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.\text{（见图 6.47）}$$

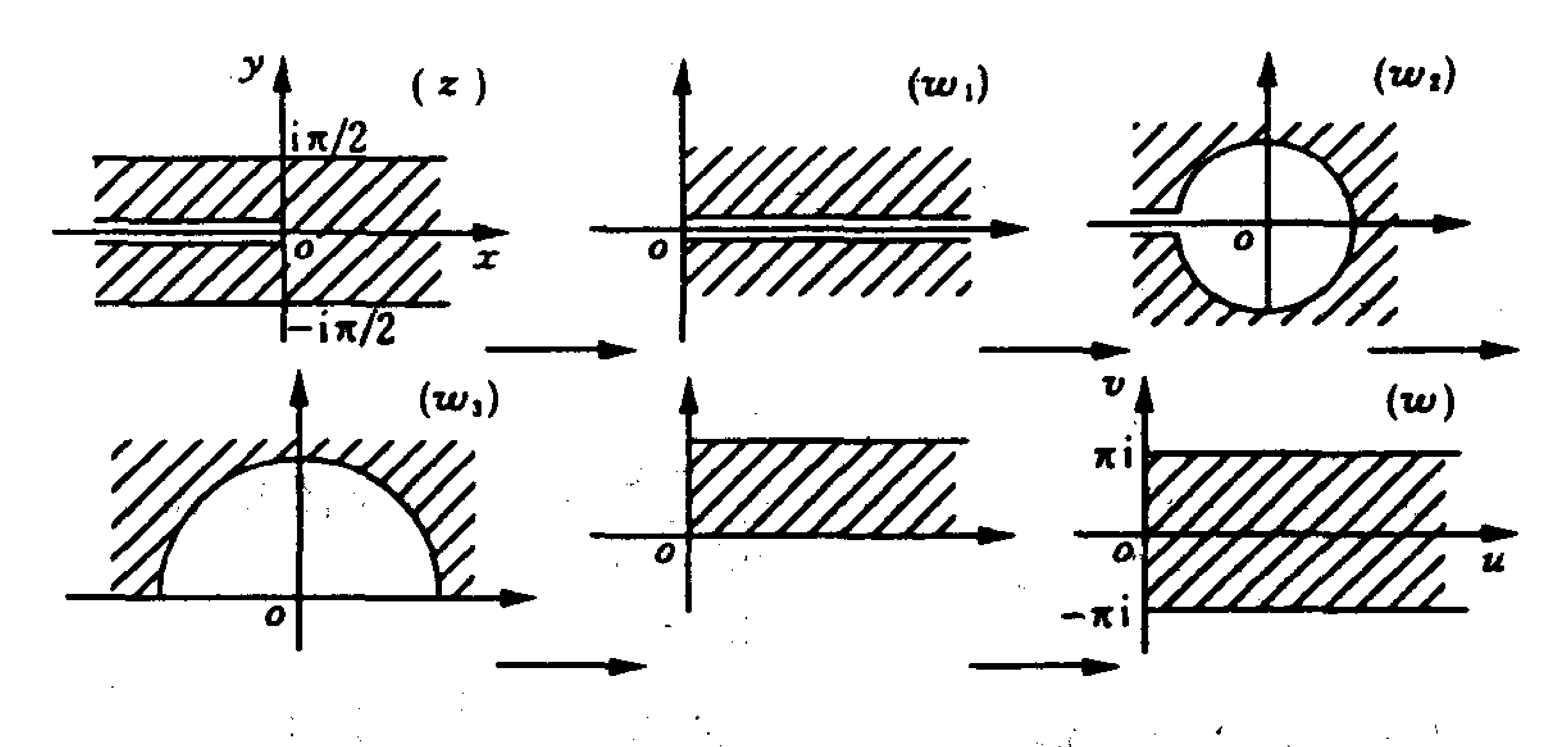


图 6.47

例 9 求将抛物线 $y^2 = 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$ 的上半支与实轴线段 $\left[-\dfrac{p}{2}, \infty\right)$ 所围区域映为上半平面的映射.

解 先用映射 $w_1 = \sqrt{z}$（取 $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 那支）将区域映为半带形 $0 < \mathrm{Im}(w_1) < \sqrt{\dfrac{p}{2}}$，$\mathrm{Re}(w_1) > 0$；再用 $w_2 = \sqrt{\dfrac{p}{2}}\pi w_1$ 将区域映为 $0 < \mathrm{Im}(w_2) < \pi$，$\mathrm{Re}(w_2) > 0$；又用 $w_3 = -\mathrm{e}^{-w_2}$ 将区域映

上半单位圆内部；再用 $w_4=-\frac{z+1}{z-1}$ 将区域映为第一象限；最后用 $w=w_4^2$. 将区域映为上半平面. 故

$$w=\left(\frac{e^{-\pi\sqrt{2z/p}}-1}{e^{-\pi\sqrt{2z/p}}+1}\right)^2 \text{（见图 6.48）.}$$

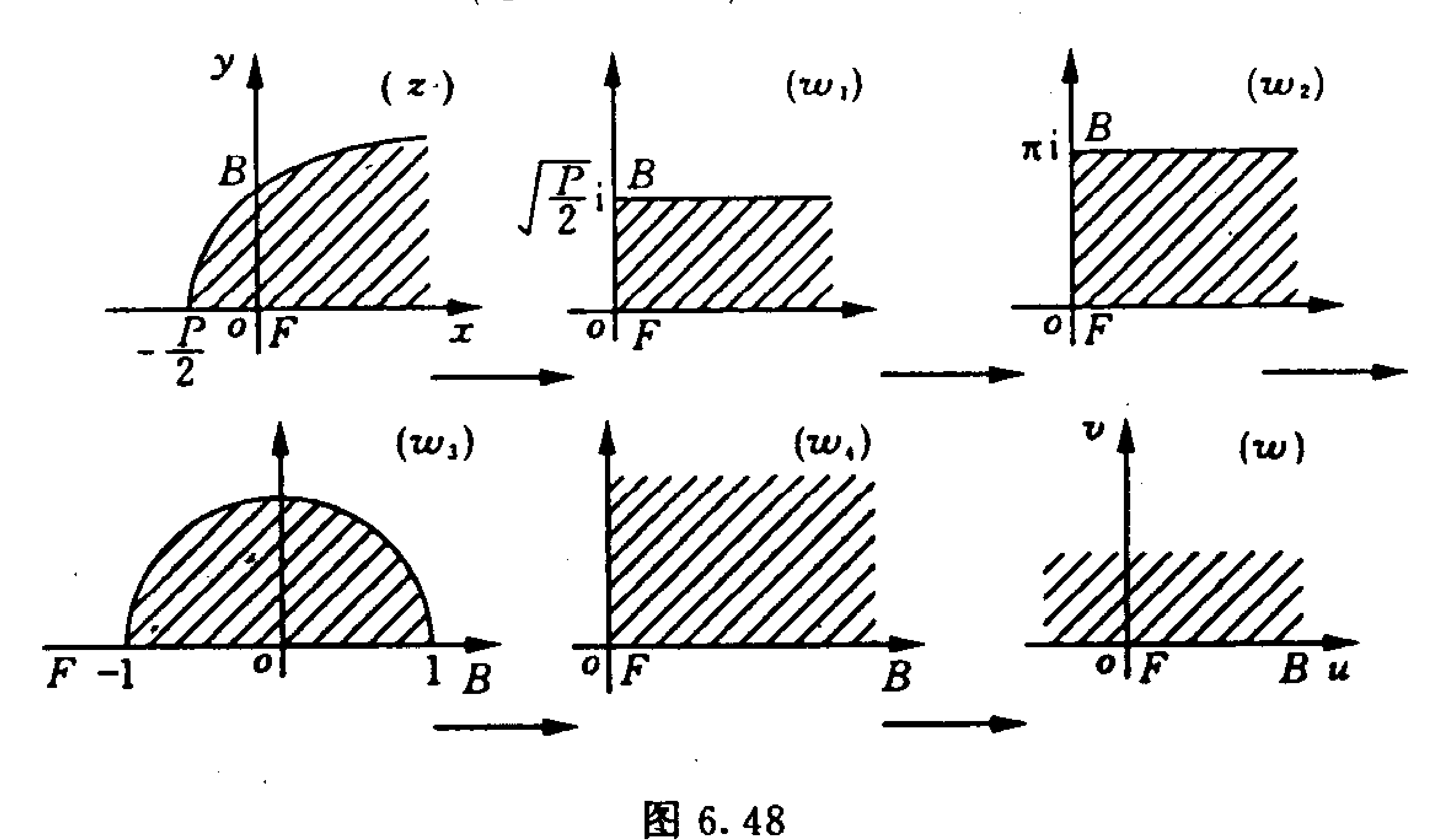


图 6.48

亦可将 w_2 用 $\sqrt{\frac{2z}{p}}\pi$ 将区域映为 $0<\operatorname{Im}(w_2)<\pi,\operatorname{Re}(w_2)>0$ 后，用 $w_3=\mathrm{i}w_2$ 将区域旋转 $\frac{\pi}{2}$，最后用 $w=\cos w_3$ 将 $-\pi<\operatorname{Re}(w_3)<0,\operatorname{Im}(w_3)>0$ 映为上半平面. 故

$$w=\cos\left(\mathrm{i}\pi\sqrt{\frac{2z}{p}}\right)=\operatorname{ch}\left(\pi\sqrt{\frac{2z}{p}}\right) \text{（图略）.}$$

例 10 求函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将下列图形映成什么图形.

(1) 圆域 $|z|<R<1$； (2) 圆外域 $|z|>R>1$；

(3) 下半单位圆内部，即 $|z|<1$ 且 $\operatorname{Im}(z)<0$.

解 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 可以写为

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

(1) 圆域的边界 $|z| = R$ 映为椭圆周

$$\frac{u^2}{(R+1/R)^2/4} + \frac{v^2}{(R-1/R)^2/4} = 1,$$

当点 z 沿圆周正向一周，w 在椭圆周上逆向绕行一周，故圆内域映为椭圆外部域(见图 6.49 的左、中图).

(2) 当点 z 沿圆周正向一周，点 w 也绕椭圆周正向一周，故圆外域映为椭圆外部域(见图 6.49 的中、右图).

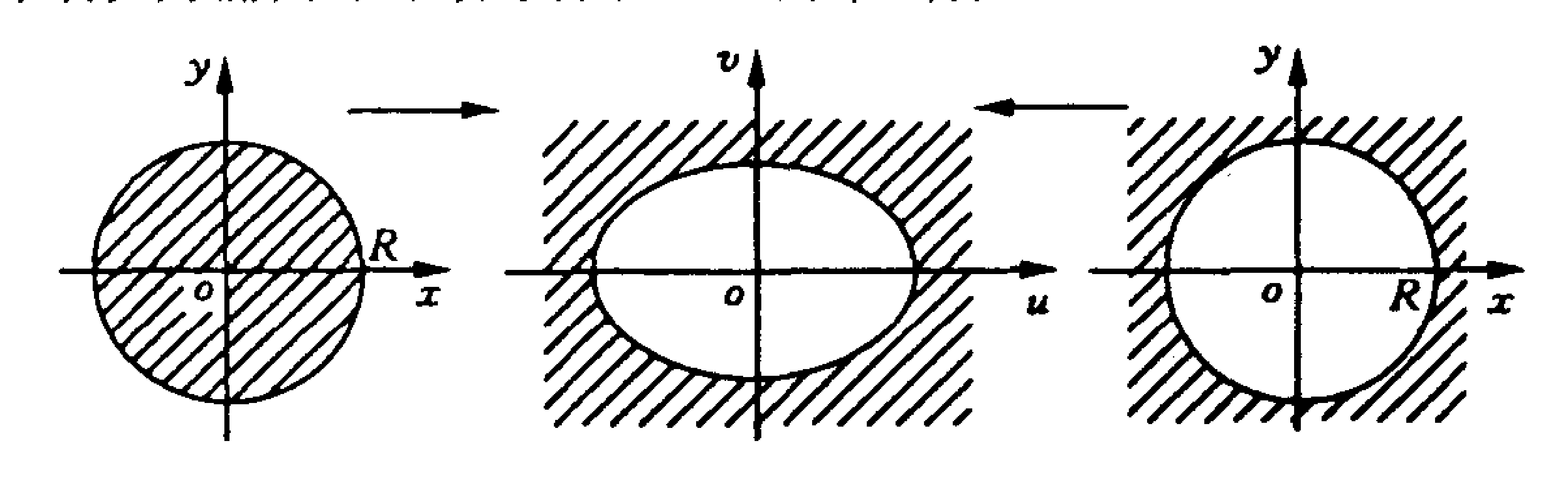


图 6.49

(3) 设 D 的边界为 l_1, l_2, l_3，像的边界为 s_1, s_2, s_3，则有

$l_1 : \theta = 0, 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \longrightarrow s_1 : v = 0, 1 \leqslant u < +\infty$;

$l_2 : \theta = \pi, 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \longrightarrow s_2 : v = 0, -\infty < u \leqslant -1$;

$l_3 : \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \rho = 1 \longrightarrow s_3 : v = 0, -1 \leqslant u \leqslant 1$.

由绕向知 $|z| < 1, \mathrm{Im}(z) < 0$ 映为 $\mathrm{Im}(w) > 0$.

例 11 求将椭圆周 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的外部映为单位圆外部的映射.

解 由于茹可夫斯基映射 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 能将圆周 $|z| = R\ (R > 1)$ 映为椭圆周

$$\frac{u^2}{[(R+1/R)/2]^2} + \frac{v^2}{[(R-1/R)/2]^2} = 1,$$

由题给条件知，$u = 5 = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$，$v = 4 = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$，所以 $R = 9$.

又，映射 $w=\frac{w_1}{9}$ 将 $|w_1|>9$ 映为 $|w|>1$.

将茹可夫斯基映射写为 $z=\frac{1}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)$，即得

$$w=\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{9}\text{(见图 6.50)}.$$

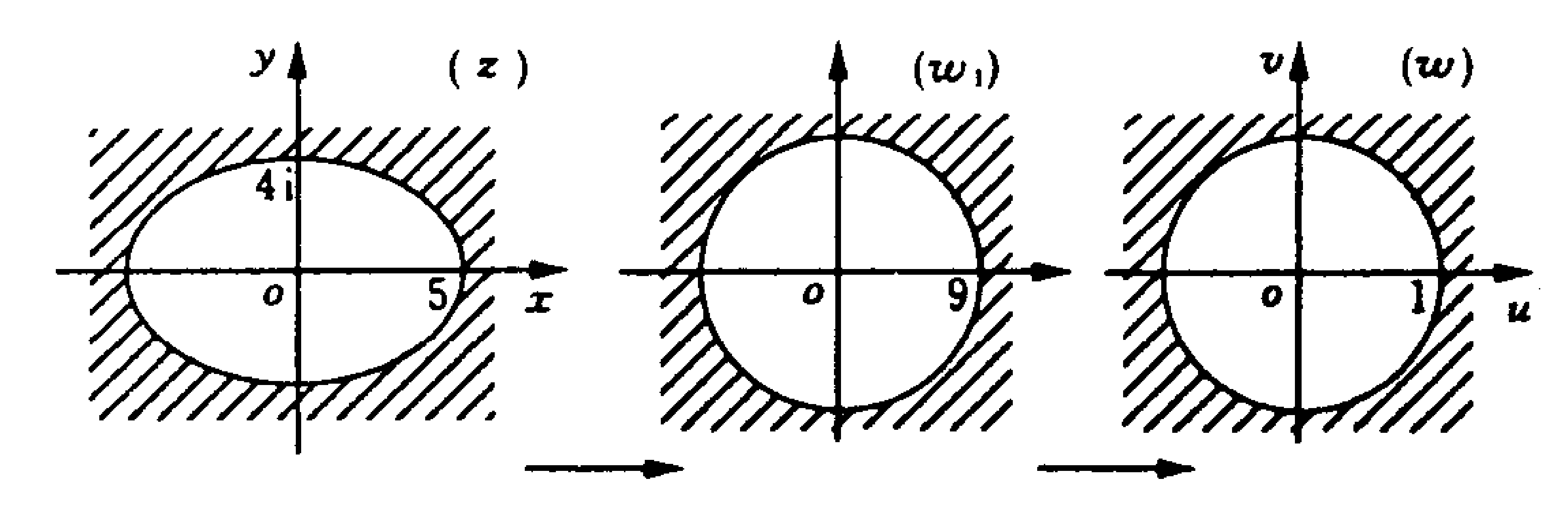


图 6.50

例 12 映射 $w=\cos z$ 将半带形区域 $D:0<\mathrm{Re}(z)<\pi$, $\mathrm{Im}(z)>0$，共形映射为什么区域？

解 因为 $w=\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ 可以分解为

$$w_1=iz,\ w_2=e^{w_1},\quad w_3=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right).$$

由于 $w=\cos z$ 在所给区域单叶解析，所以

(1) $w_1=iz$ 将半带域旋转 $\frac{\pi}{2}$，映为

$$0<\mathrm{Im}(w_1)<\pi,\ Re(w_1)<0.$$

(2) $w_2=e^{w_1}$ 将区域映为单位圆的上半圆内部

$$|w_2|<1,\quad \mathrm{Im}(w_2)>0.$$

(3) $w=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$ 将区域映为下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$(见图 6.51).

例 13 求将有割痕 $(-1,0]$ 及 $[a,1)$ 的单位圆内部 $|z|<1$ 映为上半平面半带域 $\mathrm{Im}(w)>0$, $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(w)<\frac{\pi}{2}$ 的映射

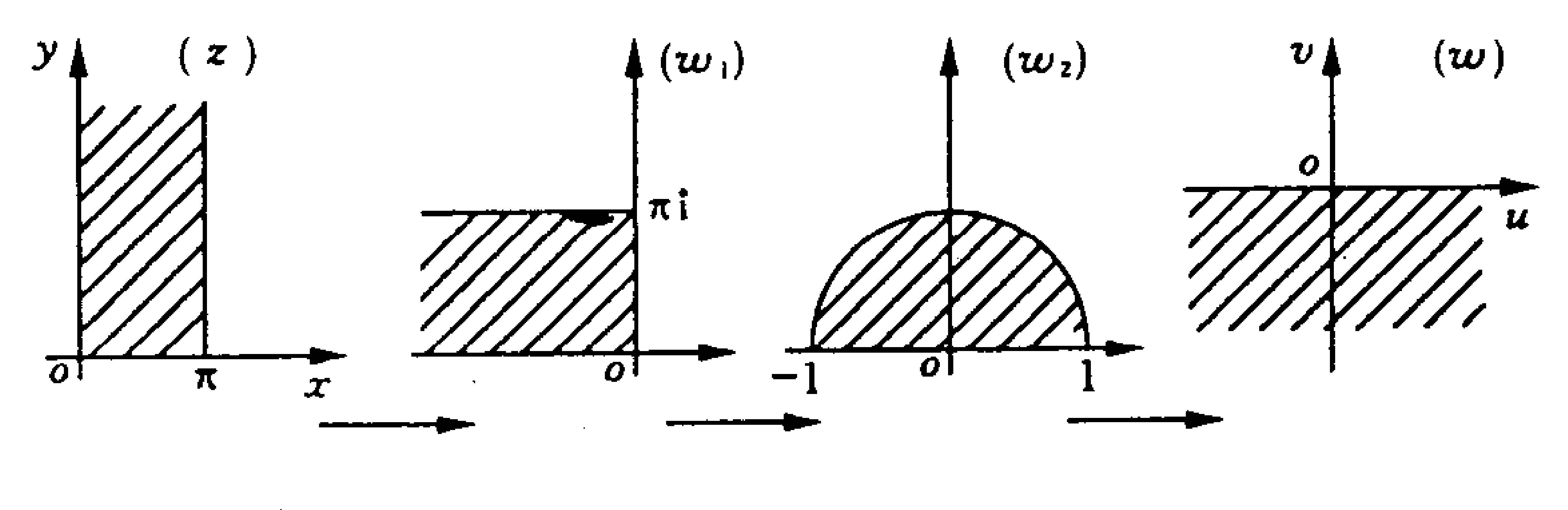


图 6.51

$(0 < a < 1)$.

解 映射 $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 将区域映为有割痕 $[-\infty, -1)$ 及 $[1, \delta]$ 的全平面，$z = -1, 0, a, 1$ 依次映为

$$-1, \quad -\infty, \quad \delta\left(= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1\right), \quad 1.$$

又，映射 $w_2 = -(w_1 - \delta) = \delta - w_1$ 将区域映为除去正实轴的全平面 $0 < \arg w_2 < 2\pi$，$w_3 = \sqrt{w_2}$ 将区域映为带形域 $0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi$，最后 $w = \arcsin z$ 将区域映为半带形域

$$\operatorname{Im}(w) > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(w) < \frac{\pi}{2}.$$

故 $$w = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} - z - \frac{1}{z}\right)}$$（见图 6.52）.

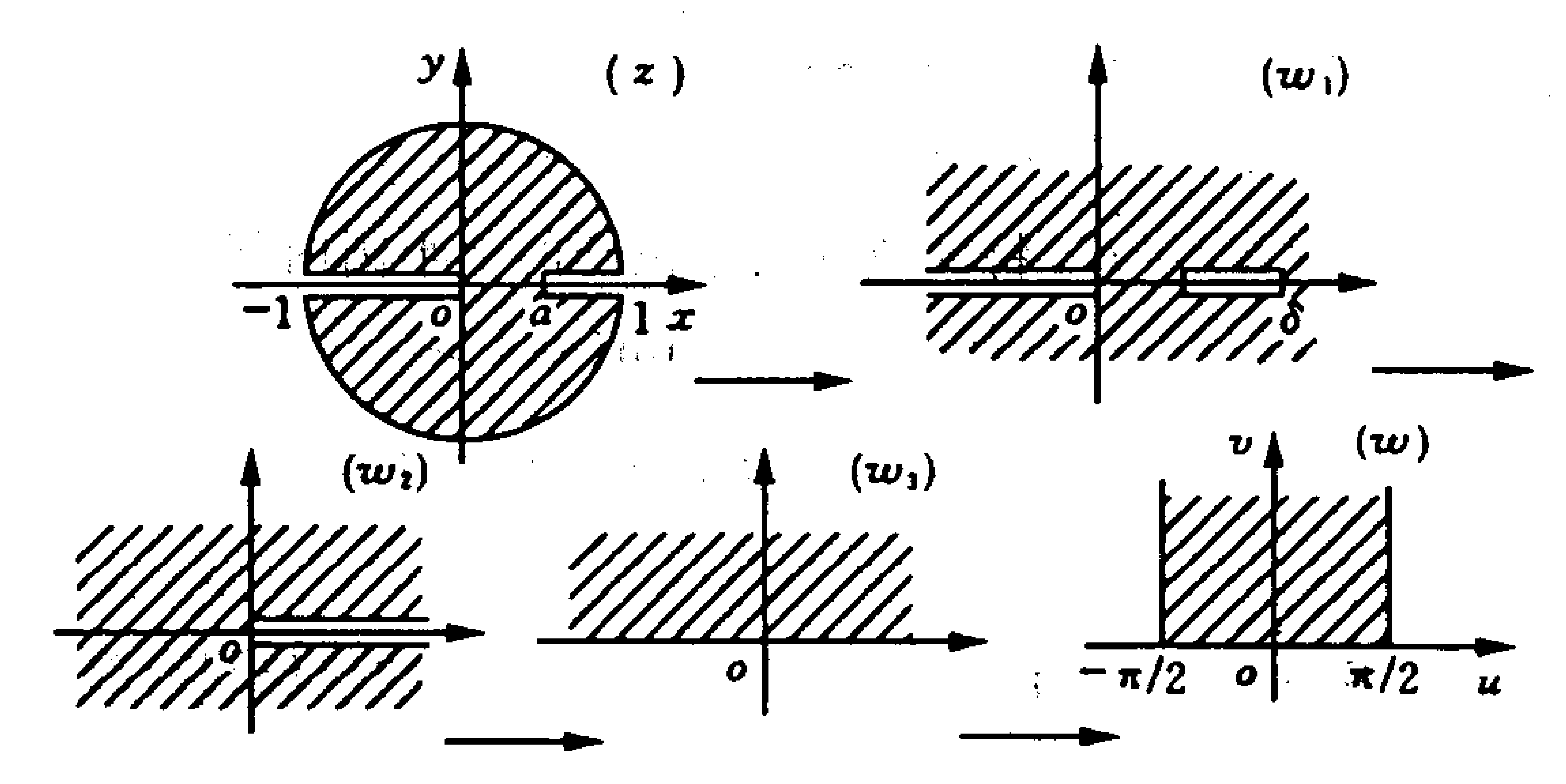


图 6.52

第四节　共形映射定理与多角形映射

主要内容

1. 黎曼定理

不论两个单连通域 B_1 与 B_2(它们的边界是由多于一个点所构成的)是怎样的，也不论这两个域中的两个点 z_0(在 B_1 中)与 w_0(在 B_2 中)以及一个实数 α_0 是怎样给定的，总有一个把域 B_1 一一对应地映为域 B_2 的共形为 $w = f(z)$ 存在，使得

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0,$$

并且这样的共形映射是惟一的.

2. 边界对应原理

设有由光滑闭曲线(或按段光滑闭曲线)Γ 所围成的线 D 以及在 D 内及 Γ 上解析的函数 $w = f(z)$，假定函数 $w = f(z)$ 将 Γ 一一对应地映为闭曲线 Γ'，Γ' 所围成的域为 D'；并且当 z 沿 Γ 移动使得 D 留在左边时，它的对应点 w 就沿 Γ' 移动且使 D' 也留在左边. 因此，$w = f(z)$ 将 D 一一对应地、共形地映为 D'.

3. 施瓦兹-克里斯托弗(Schwarz-Christoffel)映射

$$w = K\int[(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}]\mathrm{d}z + C$$

和

$$w = K'\int[(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z - x_n)^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1}]\mathrm{d}z + C$$

给出的映射称为施瓦兹-克里斯托弗映射.

施瓦兹-克里斯托弗映射能将 z 平面的上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 共形地映为 w 平面上的多角形区域.

式中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 z 平面实轴上点，$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$；α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是实常数，是多角形区域的各内角的值. K 与 K' 根据具体情况确定，也是实常数.

疑难解析

1. 在什么情形下黎曼定理不成立？

答　两种情形. 一是 B_1 和 B_2 都是扩充复平面，二是除去一点的扩充复平面. 因为这两种情形的边界点都不多于一个，不能保证映射函数 $w=f(z)$ 的惟一性.

2. 怎样具体实施施瓦兹－克里斯托弗映射？

答　若具有顶点为 w_k、夹角为 $\alpha_k\pi$ $(1\leqslant k\leqslant \pi)$ 的多角形已给定，要求 $w=f(z)$.

(1) x_1,x_2,x_3 可以任意选定(即 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有三个可以任意选定，常取 $\infty,0,1,-1$ 等值，其它值由具体问题确定.

(2) 当多角形的夹角有等于零的时候，可证明公式仍然有效.

(3) 若 $x_n=\infty$，则公式为定义中第二个形式，可少一个因子.

(4) 当多角形为变态多角形时，即有一个或几个顶点在无穷远点.

规定：在无穷远点两条射线的交角 α_k 等于这两条射线反向延长线在有限远交点处交角乘 -1.

方法、技巧与典型例题分析

边路对应问题与施瓦兹－克里斯托弗映射都有一定的难度，它的方法比较复杂，技巧要求也较高，我们只举几个例子，供读者参考.

例 1　函数 $w=z+\dfrac{z^n}{n}$ 将 $|z|<1$ 映为什么样的区域(n 为

不小于 2 的正整数)?

解 令 $z=e^{i\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,则

$$w=u+iv=e^{i\theta}+e^{in\theta}/n.$$

因此
$$\begin{cases}u=\cos\theta+\dfrac{1}{n}\cos n\theta,\\ v=\sin\theta+\dfrac{1}{n}\sin n\theta.\end{cases}$$

对 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2n}$,有 $0\leqslant n\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,故有

$$u'(\theta)=-\sin\theta-\sin n\theta<0,$$

即 $u(\theta)$ 从 $1+\dfrac{1}{n}$ 单调递减至 $\cos\dfrac{\pi}{2n}$,$v(\theta)$ 从 0 单调递增至 $\sin\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{1}{n}$. 由于 $u(\theta)$ 是偶函数,$v(\theta)$ 是奇函数,所以当 $-\dfrac{\pi}{2n}\leqslant\theta\leqslant 0$ 时,图形与 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2n}$ 时是对称的.

可以证明,对于其余的 θ 值,每隔 $\dfrac{\pi}{n}$ 的图形都与上面的图形对称且一一对应.

由于 $w=z+\dfrac{z^n}{n}$ 是 $|z|<1$ 内解析,$|z|\leqslant 1$ 内连续的函数,则由边界对应原理,映射将 $|z|<1$ 映为 w 平面上区域内部. 图 6.53 给出 $n=2$ 的图形.

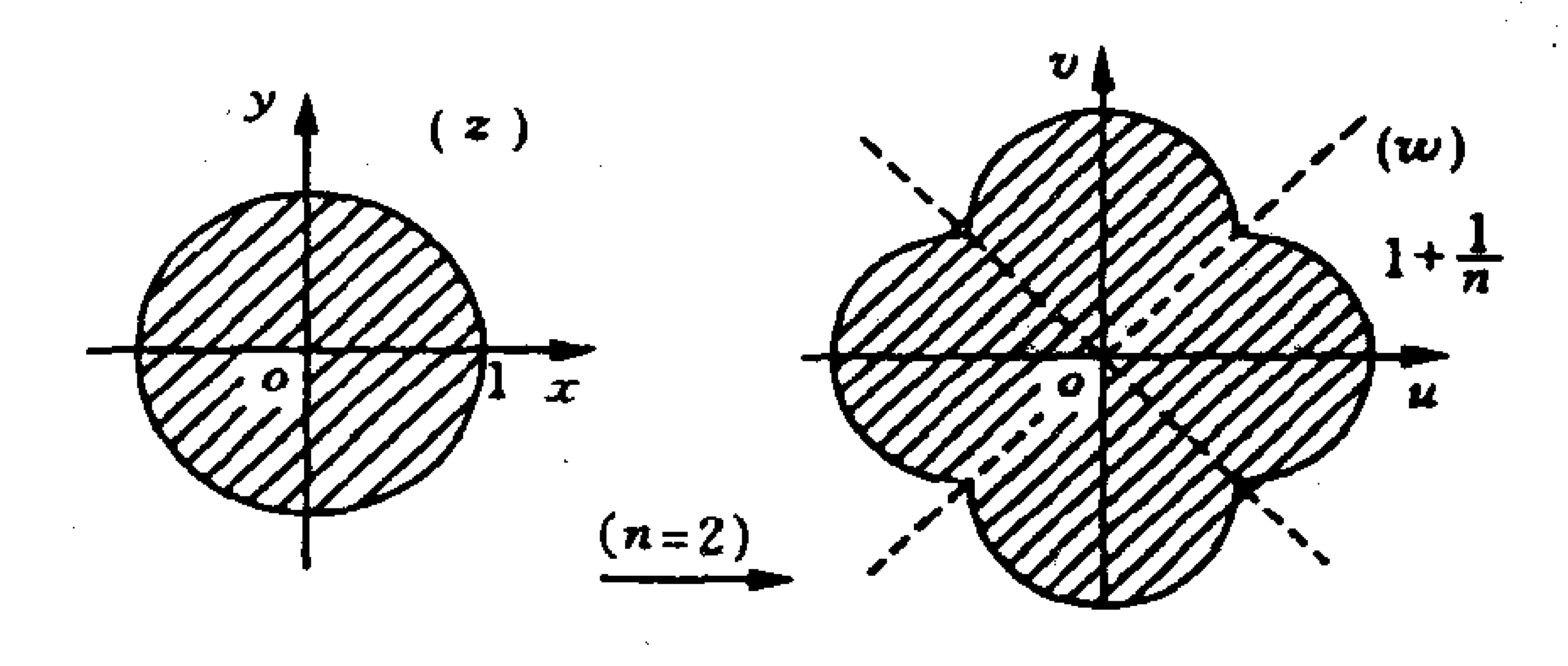


图 6.53

例 2 函数 $w=\dfrac{z}{1+z^2}$ 将单位圆上部 $|z|<1,\mathrm{Im}(z)>0$ 映

为什么样的区域?

解　当 $-1 \leqslant x \leqslant 1, y=0$ 时, $w=\frac{x}{1+x^2}$ 从 $-\frac{1}{2}$ 单调递增至 $\frac{1}{2}$. 当 $z=e^{i\theta}$ 时,有

$$w=\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}=\frac{1}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{1}{2\cos\theta}.$$

故当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, w 从 $\frac{1}{2}$ 单调递增至 ∞; 当 $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时, w 从 $-\infty$ 单调递增至 $-\frac{1}{2}$.

当 $z=i \to w=\infty$ 时,又由边界对应定理推广: $\mu=1, \alpha=1, \beta=1$ 满足 $\mu=1<\frac{\beta+2}{\alpha}=3$. 故函数 $w=\frac{1}{2\cos\theta}$ 将 $|z|<1$, $\operatorname{Im}(z)>0$ 映为上半平面 $\operatorname{Im}(w)>0$.

例 3　求将上半平面 $\operatorname{Im}(z)>0$ 映为 w 平面上以点 $a_1=0, a_2=1, a_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ 为顶点的三角形内部的共形映射.

解　在 a_1 处内角 $\alpha_1\pi=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big/\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, 于是 $\alpha_1=\frac{1}{3}$. 同理得 $\alpha_2=\frac{1}{3}, \alpha_3=1-\alpha_2-\alpha_1=\frac{1}{3}$. 在 z 平面取 a_1, a_2, a_3 在实轴上的对应点 $x_1=0, x_2=1, x_3=\infty$. 由施瓦兹-克里斯托弗公式(退化情形),得

$$\begin{aligned} w &= K\int_0^z (z-x_1)^{1/3-1}(z-x_2)^{1/3-1}dz+C \\ &= K\int_0^z z^{-2/3}(z-1)^{-2/3}dz+C \\ &= K\int_0^z \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2(z-1)^2}}+C. \end{aligned}$$

因为 $z=0 \to w=0$, 故 $C=0$.

因为 $z=1 \to w=1$, 故

$$A=1\Big/\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}.$$

所以 $w=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2(z-1)^2}}\Big/\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$(见图 6.54).

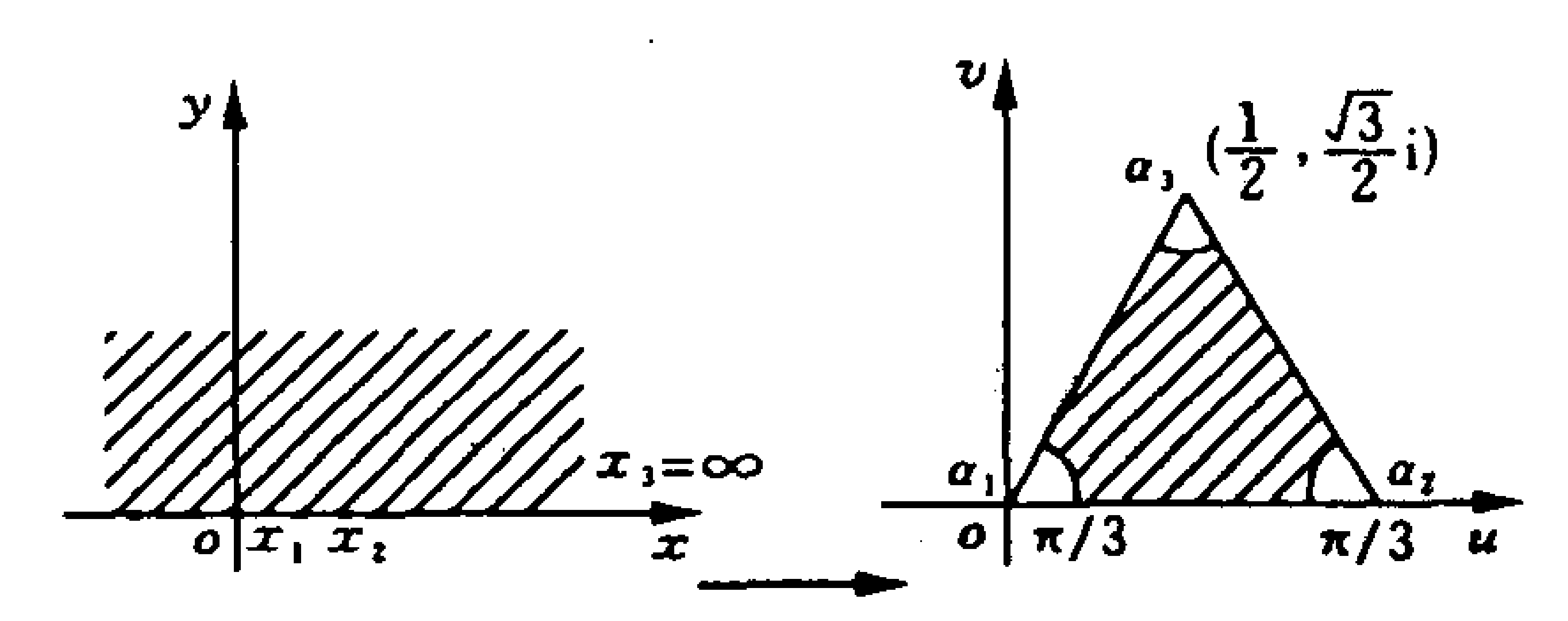


图 6.54

例 4 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为 w 平面带形域 $0<\mathrm{Im}(w)<\pi$ 的共形映射.

解 将 w 平面上带形域理解为顶点为 $a_1=\infty, a_2=0, a_3=\infty, a_4=\pi\mathrm{i}$ 的矩形. a_1, a_3 点内角为 0, a_2, a_4 点内角为 π. 故 $\alpha_1=\alpha_3=0, \alpha_2=\alpha_4=1$. 取 a_1, a_2, a_3, b_4 在 z 平面上对应点为 $x_1=0, x_2=1, x_3=\infty, x_4$. 则由施瓦兹-克里斯托弗公式(退化情形),可得

$$w=K\int_1^z (z-x_1)^{0-1}(z-x_2)^{1-1}(z-x_4)^{1-1}\mathrm{d}z+C$$

$$=K\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z}+C=k\ln z+C.$$

因为 $z=1\to w=0$, 故 $C=0$.

因为 $z=x_4\to w=\pi\mathrm{i}=k\ln|x_4|+\mathrm{i}K\arg x_4$, 故

$$K=1,\ x_4=-1.$$

所以 $$w=\ln z\text{(见图 6.55)}.$$

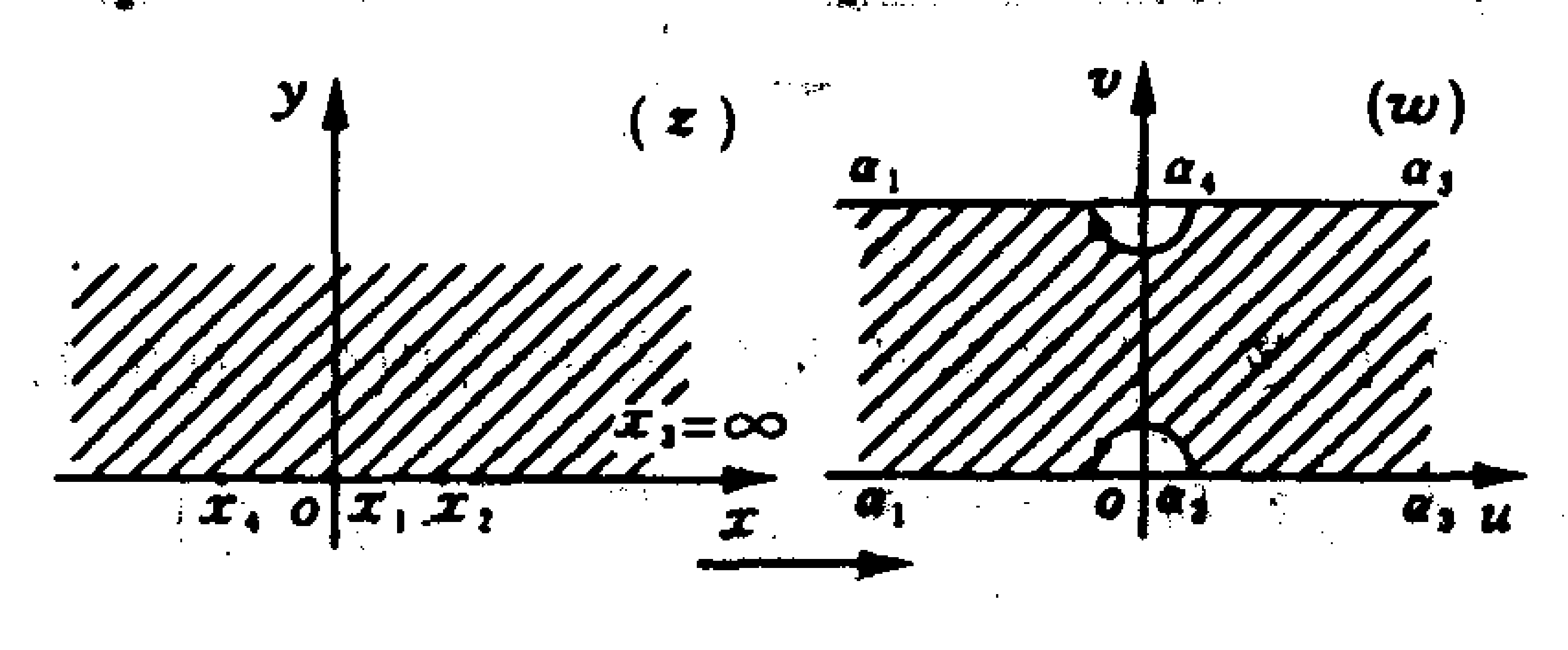


图 6.55

例 5 求将半带域 $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < a$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的共形变换.

解 将半带域 $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < a$ 理解为三角形,顶点为 $a_1 = a_i, a_2 = 0, a_3 = \infty$. 各内角为 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$,所以

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 0.$$

设 w 平面上 a_1, a_2, a_3 的对应点为 $b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = \infty$. 所以

$$\begin{aligned} z &= K\int (w+1)^{1/2-1}(w-1)^{1/2-1}\mathrm{d}w + C \\ &= K\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{w^2-1}} + C = K\operatorname{arcch} w + C. \end{aligned}$$

因为 $w = 1 \to z = 0$,故 $C = 0, w = \operatorname{ch}\frac{z}{k}$.

因为 $w = -1 \to z = a\mathrm{i}$,故

$$-1 = \operatorname{ch}\frac{a\mathrm{i}}{K} = \cos\left(\frac{-a}{K}\right) \Rightarrow -\frac{a}{K} = -\pi, \quad K = \frac{a}{\pi}.$$

于是,所求映射为 $w = \operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}$(见图 6.56).

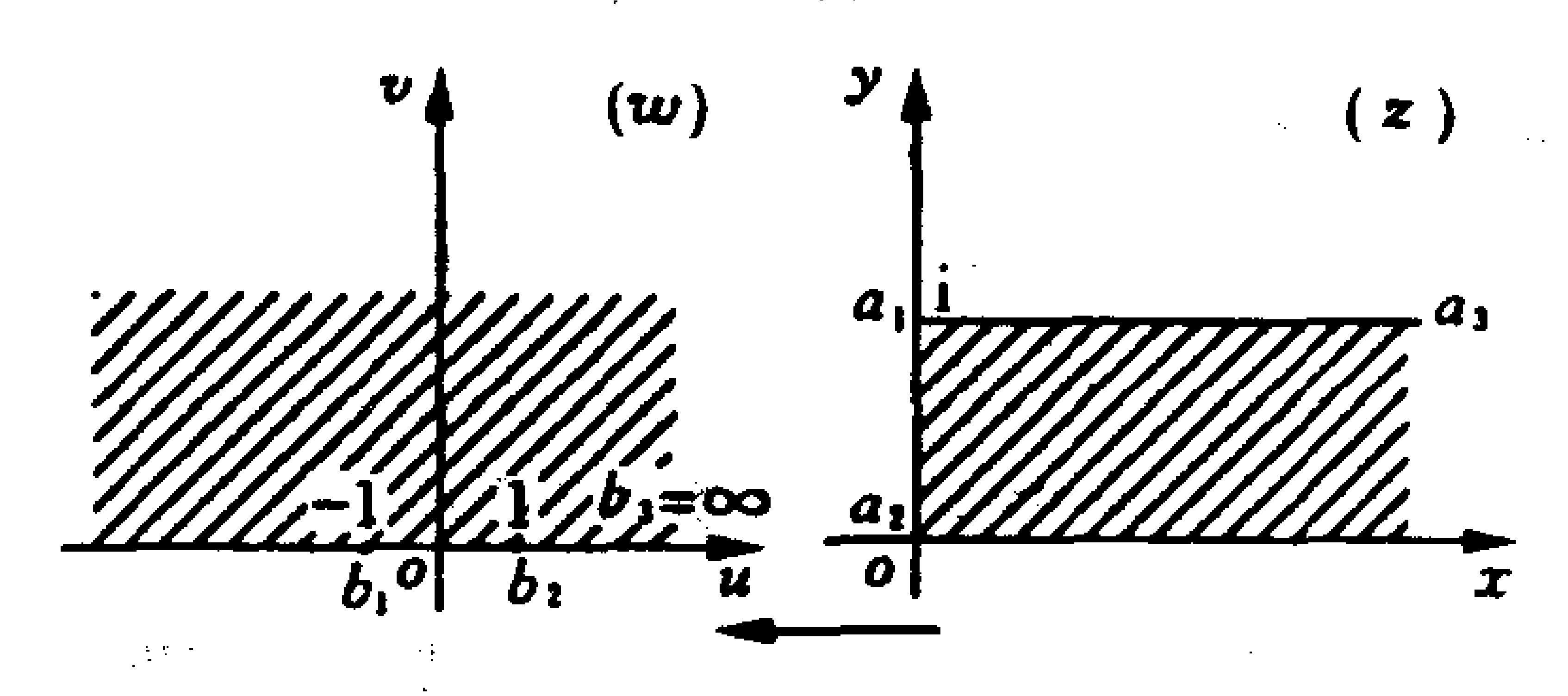


图 6.56

注意 施瓦兹-克里斯托弗公式中的积分,有的教科书用不定积分表示,有的教科书用定积分记号 $\int_{z_0}^{z}$ 表示. 选取 z_0 一定要考虑使积分有意义.

例 6 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映为 w 平面上如所示的阴影

区域，并使 $x=0$ 对应 A 点，$x=-1$ 对应 B 点的映射.

解　将 w 平面上区域理解为顶点为 A,B,C 的三角形，A,C 为无穷远点. 在 z 平面上取 $x_k=0,-1,\infty$ 对应 A,B,C，则对应 $\alpha_k=0,\frac{3}{2}\pi,0$.

由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w=K\int(z-0)^{0-1}(z+1)^{3/2-1}\mathrm{d}z+C_1=K\int\frac{\sqrt{z+1}}{z}\mathrm{d}z+C_1$$
$$=K\left[2\sqrt{z+1}+\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]+C_1.$$

写成复数形式，有

$$u+\mathrm{i}v=(a+\mathrm{i}b)\Big\{2[(x+1)^2+y^2]^{1/4}$$
$$\cdot\left(\cos\frac{\arg(z+1)}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg(z+1)}{2}\right)$$
$$+\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}+C_2+\mathrm{i}C_3,$$

则　$$v=2a[(x+1)^2+y^2]^{1/4}\sin\frac{\arg(z+1)}{2}+a\arg\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$$
$$+2b[(x+1)^2+y^2]^{1/4}\cos\frac{\arg(z+1)}{2}$$
$$+b\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+C_3.$$

(1) 当 w 沿 $BA\to\infty$ 时 $(v=\pi)$，$z\to0^-$ $(y=0)$. 代入 v 的表达式(取 $x\to0^-$) 可得 $a\pi+c_3=\pi,b=0$.

(2) 当 w 沿 $OA\to\infty$ 时 $(v=0)$，$z\to0^+$ $(y=0)$. 代入 v 的表达式(取 $x\to0^+$) 可得：$c_3=0,a=1,k=1$. 于是

$$w=2\sqrt{z+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}+C_2.$$

因为 $z=-1\to w=\pi\mathrm{i},\Longrightarrow C_2=0$，故

$$w=2\sqrt{z+1}+\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}(\text{见图 6.57}).$$

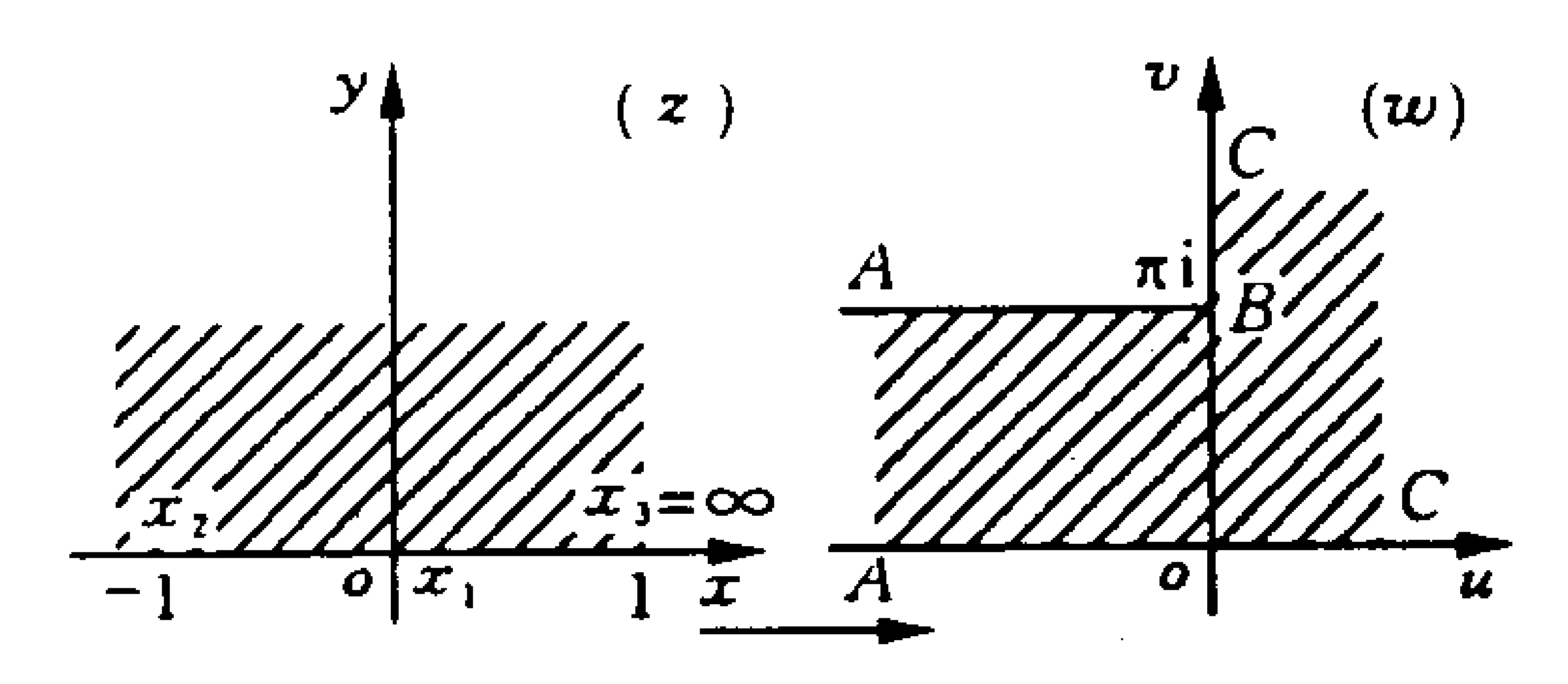


图 6.57

例 7 证明：$w=\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z(1-z^2)}}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为一个边长为 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$ 的正方形.

证 设 $ABCD$ 为任一正方形，依黎曼定理，存在映射 $w=f(z)$，将角域第一象限映为三角形 ABC 内部，使 $w=A,B,C$ 对应 $z=0,1,\infty$，并使正虚轴映为 AC（正方形对角线）. 由对称原理，共形映射 $w=f(z)$ 将上半平面映为正方形 $ABCD$，且 $-1,0,1,\infty$ 对应 D,A,B,C 由施瓦兹 - 克里斯托弗公式，得

$$w=K\int(z+1)^{1/2-1}(z-0)^{1/2-1}(z-1)^{1/2-1}\mathrm{d}z+C$$

$$=K\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z(1-z^2)}}+C.$$

再证明正方形边长为 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

$$l=|AB|=\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right||\mathrm{d}z|$$

$$=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x\ (\text{令 } x^2=t)$$

$$=\int_0^1 t^{-3/4}(1-t^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{1/2-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\ (\text{见图 6.58}).$$

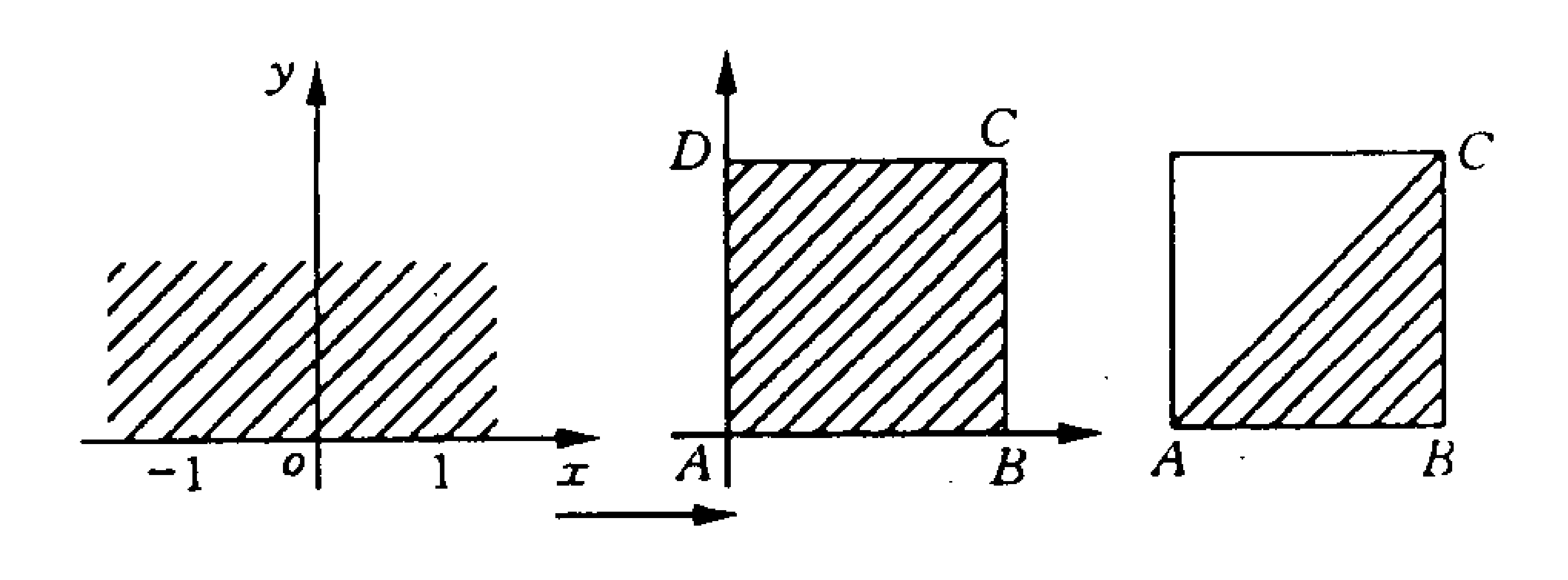


图 6.58

例 8 求将上半平面半带域

$$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{Im}(z)>0$$

映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的共形映射. 并使 $z=\pm\frac{\pi}{2}$ 对应 $w=\pm 1$.

解 先求逆映射 $z=\varphi(w)$. 将半带域视作一个顶点在 ∞ 的变态三角形. 三角形的三顶角为 $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0$. 在 w 平面上取 $w=-1$, $1,\infty$ 依次对应 z 平面点 $z=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\infty$, 由施瓦兹-克里斯托弗公式, 得

$$\begin{aligned} w &= K\int (w+1)^{1/2-1}(w-1)^{1/2-1}dw + C \\ &= K\int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + C = K\arcsin w + C \end{aligned}$$

因为 $w=-1\rightarrow z=-\frac{\pi}{2}, w=1\rightarrow z=\frac{\pi}{2}$, 故

$$K=1,\quad C=0.$$

于是, 得映射 $z=\arcsin w$. 取逆映射即为所求, 即

$$w=\sin z \text{ (见图 6.59)}.$$

例 9 证明: 将单位圆内部 $|z|<1$ 映为五角星内部, 圆心映为五角星中心的映射为

$$w=K\int \frac{(1-z^5)^{2/5}}{(1+z^5)^{2/5}}dz;$$

当五角星外接圆半径为 R 时, 有

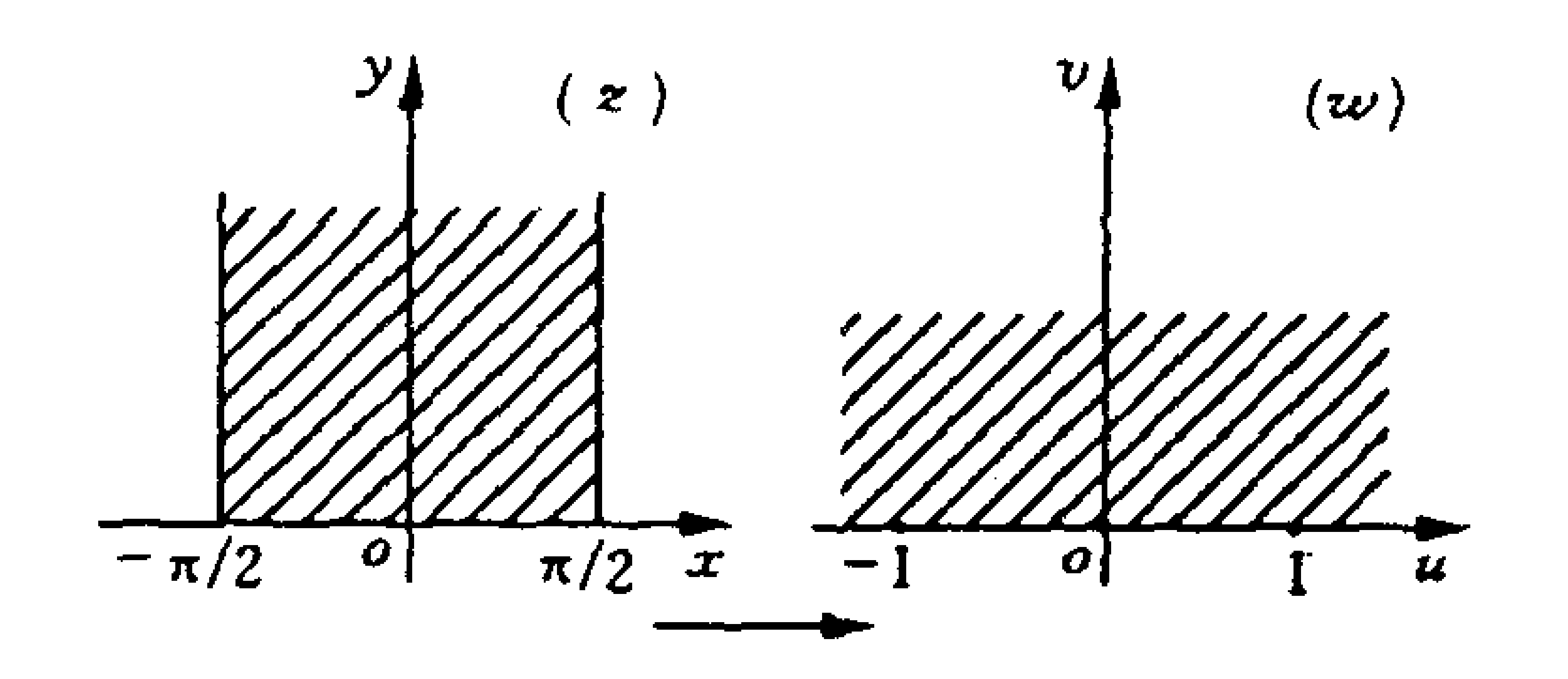


图 6.59

$$|K| = 2^{3/5} \cdot 5\,\frac{\Gamma(3/10)}{\Gamma(1/10)\Gamma(1/5)}R.$$

证　如图 6.60 所示. $\alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{1}{5}, o_1B_1 = R$. 由共形映射一般原理,存在惟一映射将扇形 oa_1b_1 映为三角形 $o_1A_1B_1$,使 $o_1 \to o, A_1 \to a_1, B_1 \to b_1 (b_1 = e^{i\pi/5})$. 根据区域开拓与对称原理,存在唯一映射 $w = f(z)$ 将 $|z| < 1$ 映为五角星内部,使 $o_1 \leftrightarrow o, A_k \leftrightarrow a_k, B_k \leftrightarrow b_k (k = 1, 2, \cdots, 5)$. 其中 $a_k = e^{i2\pi(k-1)/5}$ 是 $z^5 - 1 = 0$ 的根, $b_k = e^{i(2k-1)\pi/5}$ 是 $z^5 + 1 = 0$ 的根.

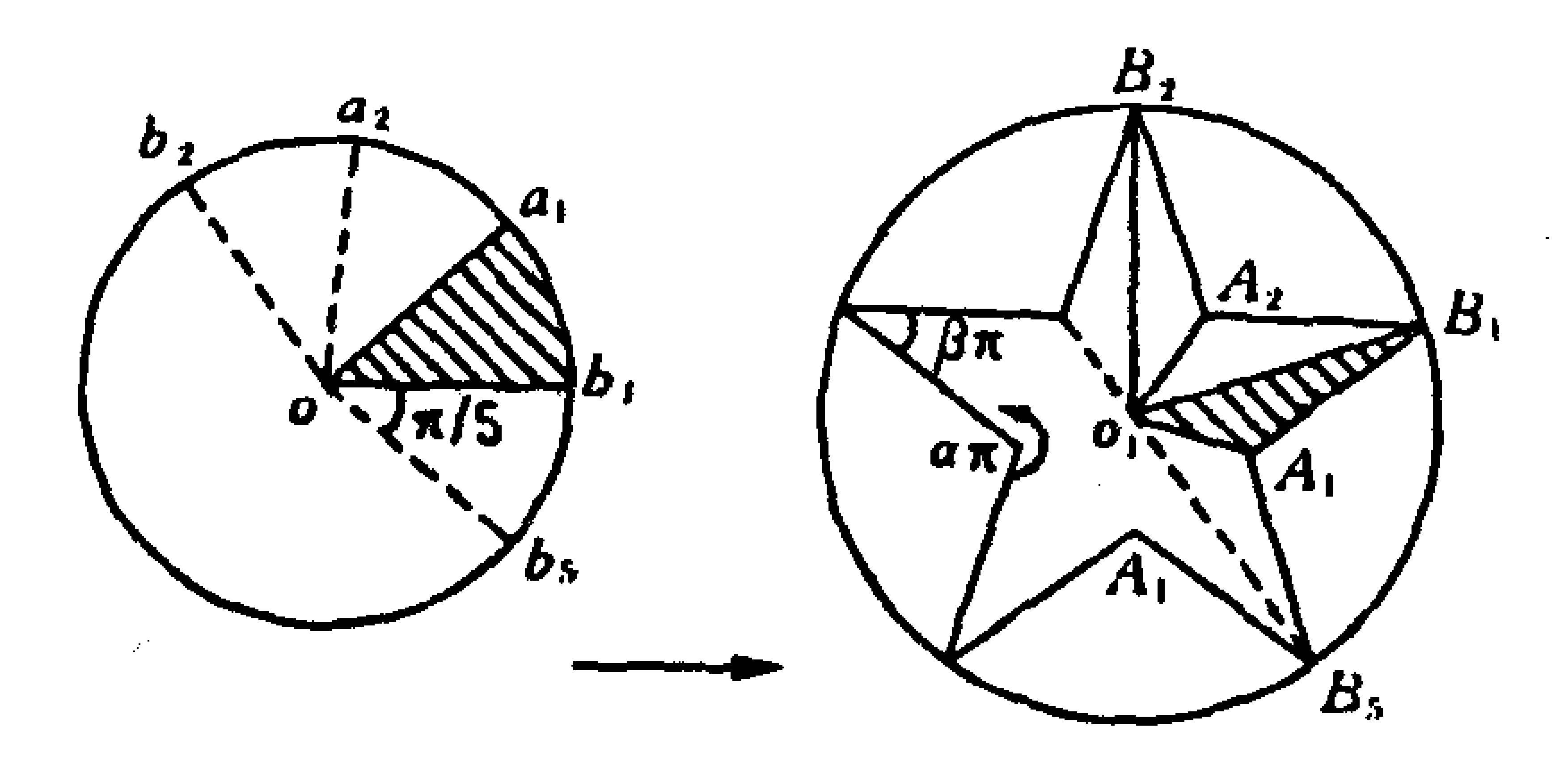


图 6.60

由施瓦兹 - 克里斯托弗公式,得

$$w = f(z) = K\int \frac{\prod (a_k - z)^{2/5}}{\prod (b_k - z)^{2/5}}dz = K\int \frac{(1 - z^5)^{2/5}}{(1 + z^5)^{2/5}}dz.$$

又由 $z = -1$ 与 b_3 对应 $o_1B_3 = R$,则

$$R = |K| \left| \int_{-1}^{0} \frac{(1 - x^5)^{2/5}}{(1 + x^5)^{2/5}}dx \right|.$$

作代换 $t=\left(\frac{1+x^5}{1-x^5}\right)^2$，得

$$R=|K|2^{-2/5}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 t^{-9/10}(1-t)^{-4/5}\mathrm{d}t$$
$$=|K|2^{-2/5}\frac{1}{5}\frac{\Gamma(1/10)\Gamma(1/5)}{\Gamma(3/10)},$$

即
$$|K|=2^{2/5}\frac{5\Gamma(3/10)}{\Gamma(1/10)\Gamma(1/5)}R.$$

例 10 利用施瓦兹-克里斯托弗公式，求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 双方单值共形映射到下列区域的函数 $w=f(z)$：

(1) 全平面上除去正实轴后的区域；

(2) $0<\mathrm{Im}(w)<h$ 且满足 $f(-1)=-\infty, f(1)=+\infty$；

(3) 内角为 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}$ 的三角形，且满足

$$f(0)=0,\ f(1)=a>0,\ f(\infty)=a+\mathrm{i}\frac{a}{3};$$

(4) 如图 6.61 所示，$f(0)=A, f(1)=B, f(\infty)=\infty$.

解 (1) 设 $f(0)=0, f(\infty)=\infty$，且 $w=0$ 点的角度为 2π. 则由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w=K\int z^{2-1}\mathrm{d}z+C=\frac{K}{2}z^2,$$

由 $f(0)=0\Longrightarrow C=0$. 由正实数→正实数，知 K 为正实数.

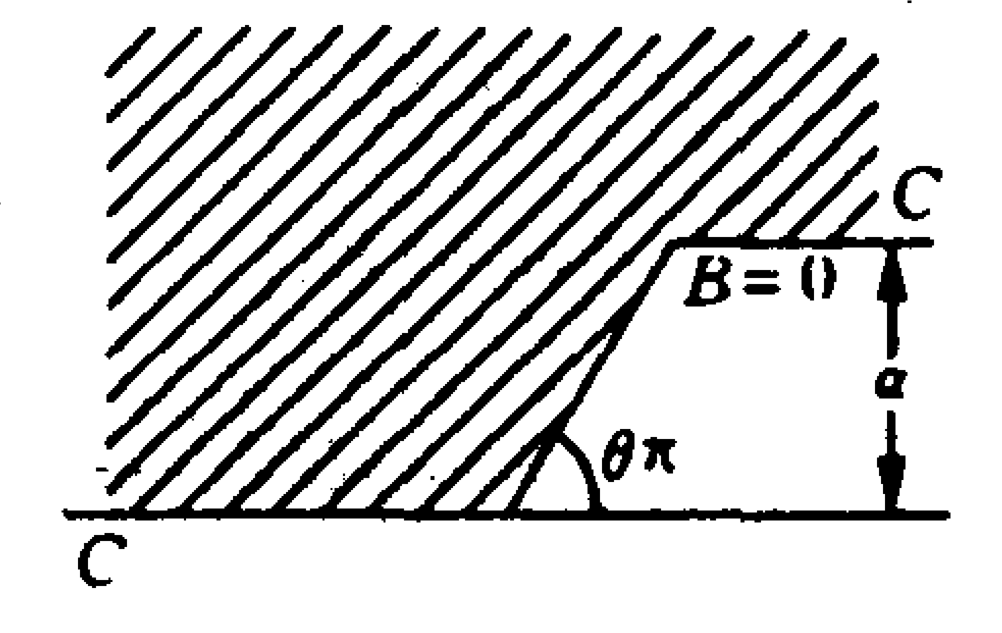


图 6.61

(2) 由于平面两端无穷远处夹角为零，由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w=K\int(z+1)^{-1}(z-1)^{-1}\mathrm{d}z=\frac{K}{2}\left(\ln\frac{z-1}{z+1}-\pi\mathrm{i}\right).$$

因为 $z=x, 0<x<1\rightarrow w$ 为实数，而 $\ln\frac{z-1}{z+1}$ 虚部为 π，则 K 为实数. 又设 $z_1=1-\varepsilon$ 和 $z_2=1+\varepsilon$，对应的 w_1 在实轴上，w_2 在 $\mathrm{Im}(z)=h$ 上. 于是

$$h=\mathrm{Im}(w_2-w_1)=\mathrm{Im}\,\frac{k}{2}\left(\ln\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}-\pi\mathrm{i}-\ln\frac{-\varepsilon}{2+\varepsilon}+\pi\mathrm{i}\right)$$
$$=\mathrm{Im}\,\frac{K}{2}\left(\ln\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}-\ln\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}+\pi\mathrm{i}\right)=-\frac{K}{2}\pi,$$

故 $K=-\frac{2h}{\pi}$. 因此

$$w=\frac{h}{\pi}\left(\ln\frac{z+1}{z-1}+\pi\mathrm{i}\right).$$

(3) 设 $z=0,1,\infty\to w=0,a,a+\frac{\mathrm{i}a}{3}$，由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w=K\int z^{1/6-1}(z-1)^{1/2-1}\mathrm{d}z\quad(\text{由 } z=0\to w=0 \text{ 知 } C=0).$$

令 $z=x, 0<x<1, w$ 取正实数，则

$$\int_0^x t^{-5/6}(t-1)^{-1/2}\mathrm{d}t=\int_0^x t^{-5/6}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t$$
$$=-\mathrm{i}\int_0^x t^{-5/6}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t.$$

故当 $x=1$ 时，有

$$a=-K\mathrm{i}\int_0^1 t^{-5/6}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t=-K\mathrm{i}B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$$
$$=-K\mathrm{i}\,\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2/3)}.$$

即
$$K=\mathrm{i}\,\frac{a\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)}.$$

从而
$$w=\mathrm{i}\,\frac{a\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)}\int z^{-5/6}(z-1)^{-1/2}\mathrm{d}z.$$

(4) 设 $z=0,1,\infty\to w=A,B,C$，由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w=K\int z^{1-\theta-1}(z-1)^{1+\theta-1}\mathrm{d}z.$$

令 $z=x>1$ 时，w 取正实数值，则积分也取正实数值，故

$$K>0.$$

又 $z_1=R\to w_1>0, z_2=-R\to w$，虚部为 $-\alpha$，于是有

$$\mathrm{Im}(w_2 - w_1) = \mathrm{Im}K \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \arg z = 0 \uparrow R}} z^{-\theta}(z-1)^{\theta}\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{Im}K\int_{\Delta}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\theta}\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{Im}K\int_{\Delta}\left(1 - \frac{\theta}{z} + \cdots\right)\mathrm{d}\theta \text{（展开）}$$

$$= \mathrm{Im}K[-2R - \theta\pi\mathrm{i} + o(1)]$$

（Δ 表示 $|z| = R$, $\arg z = 0 \uparrow R$），

故
$$-\alpha = -K\theta\pi \Longrightarrow K = \frac{\alpha}{\theta\pi}.$$

因此
$$w = \frac{\alpha}{\theta\pi}\int\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\theta}\mathrm{d}z.$$

例 11 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 单叶共形地映为边长为 2 的等边三角形的映射（三顶点为 $-1, 1, \sqrt{3}\mathrm{i}$）.

解 设 $z = 0, 1, \infty \to w = -1, 1, \sqrt{3}\mathrm{i}, \alpha_k = \frac{\pi}{3}, k = 1, 2, 3$. 由施瓦兹-克里斯托弗公式，得

$$w = K\int z^{-2/3}(z-1)^{-2/3}\alpha z + C.$$

因为 $z = 0 \to w = -1$，故 $C = -1$.

因为 $z = 1 \to 1 = K\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-2/3}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\mathrm{d}x = 1$，故

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = K\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-2/3}\mathrm{d}x = KB\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \Big/ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

因此
$$K = \frac{\Gamma(2/3)}{[\Gamma(1/3)]^2} \cdot 2\left(\frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}\right)$$

$$= (-\sqrt{3} + \mathrm{i})\frac{\Gamma(2/3)}{[\Gamma(1/3)]^2}.$$

从而
$$w = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})\frac{\Gamma(2/3)}{[\Gamma(1/3)]^2}\int z^{-2/3}(z-1)^{-2/3}\mathrm{d}z - 1.$$

例 12 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 单叶映为图 6.62 所示区域

的映射.

解 先考虑图6.63(a)中上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映为图6.63(b)中图形的映射.令$z=-1,0,\infty\to w=A_4,A_1,A_3$.

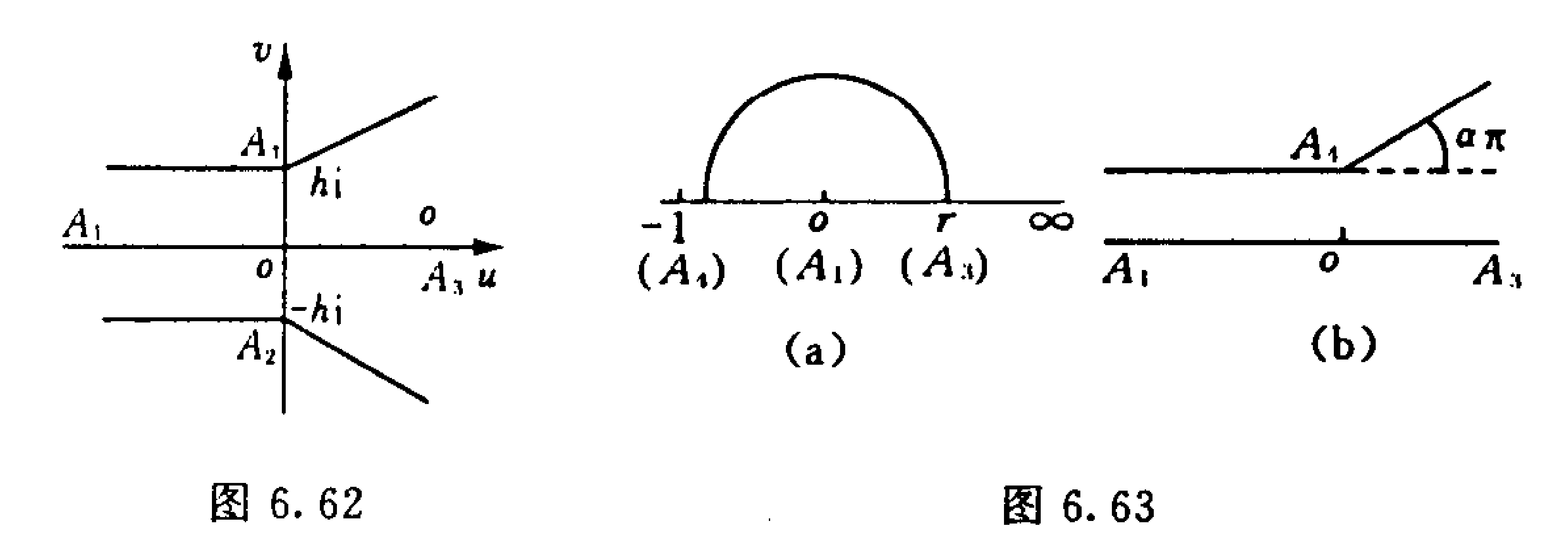


图 6.62

(a) (b)

图 6.63

由施瓦兹-克里斯托弗公式,得

$$w=K\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\mathrm{d}z+\mathrm{i}h.$$

若$z=-r$,$0<r<1$,w在A_1与A_4之间,即虚部为h.因$\int_{-1}^{-r}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\mathrm{d}z$取负虚数,故$K$是实数.

又
$$w_2-w_1=K\int_{\Delta}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\mathrm{d}z=K\int_{\Delta}\frac{\mathrm{d}z}{z}+o(1)$$
$$=K\pi\mathrm{i}+o(1)\ (\Delta\text{表示}\ |z|=r,\arg z=0\uparrow\pi).$$

所以 $\mathrm{Im}(w_2-w_1)=K\pi+o(1)\Longrightarrow h=K\pi\Longrightarrow K=\frac{h}{\pi}$.

因此
$$w=f(z)=\frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\mathrm{d}z+\mathrm{i}h.$$

由对称原理,函数

$$w=F(z)=\begin{cases}f(z), & x\in\{(\mathrm{Im}(z)>0)\cup(z=x>0)\},\\ \overline{f(\bar{z})}, & \mathrm{Im}(z)<0.\end{cases}$$

将全平面去掉负实轴后的区域双方单值地共形映射为所求区域.

因此,$w=F(-z^2)$将$\mathrm{Im}(z)>0$映为所求区域.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝复变函数　　内容、方法与技巧
作者＝孙清华　　孙昊
页数＝４０６
ＳＳ号＝１１１８６１３０
出版日期＝２００３年０７月第１版

前言
目录